

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (312)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.

МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.

MARCH – APRIL 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. PhD докторы (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. доктор PhD (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. PhD (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 5 – 11

D.S. Dzhumabaev¹, A.S. Zharmagambetov²

^{1,2}International Information Technologies University, Almaty, Kazakhstan,
 Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, 125,
 Pushkin str., Almaty, Kazakhstan¹
 dzhumabaev@list.ru¹ armanform@gmail.com²

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Annotation. Numerical method to solve the linear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel is proposed. Dividing interval into N parts and introducing additional parameters as the values of solution at the left-end points of subintervals origin problem is reduced to the multipoint boundary value problem for the system of integro-differential equations with parameters. At the fixed values of parameters the special Cauchy problems for the system of integro-differential equations are solved. Introducing the additional parameters allows as the solvability of the boundary value problem to reduce to the solvability of system of linear algebraic equation with respect to introduced parameters. The Cauchy problems for the ordinary differential equations and evaluating the definite integrals on subintervals are the main auxiliary problems of method proposed. The Cauchy problems are solved by the Bulirsch-Stoer method and definite integrals are determined by the Simpson method.

Keywords. Fredholm integro-differential equations, linear boundary value problem, parametrization, Bulirsch-Stoer method.

Various problems of physics, engineering, biology, etc. lead to the study of integro-differential equations and to the formulation of related specific tasks. In connection with this, the theory of such equations has attracted the attention of mathematicians. Qualitative properties of problems for the Fredholm integro-differential equations and methods for solving these problems are considered in the works of many others [1-11].

In the present paper, we consider the linear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^m \int_0^T \varphi_k(t)\psi_k(s)x(s)ds + f(t), t \in (0, T), x \in R^n \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, d \in R^n \quad (2)$$

where the matrices $A(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(s)$, $0 < k < m$ and vector $f(t)$ are continuous on $[0, T]$. A solution to problem (1) and (2) is a vector function $x(t)$, continuous on $[0, T]$ and continuously differentiable on $(0, T)$, satisfying the integro-differential equation (1) and boundary condition (2).

Given the points: $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$, and let Δ_N denote the partition of interval $[0, T)$ into N subintervals $[0, T) = \bigcup_{r=1}^N [t_{r-1}, t_r]$. The case, when the interval $[0, T]$ is not divided into parts, we denote by Δ_1 .

Let $x_r(t)$ be the restriction of function $x(t)$ to the r -th interval $[t_{r-1}, t_r]$, i.e. $x_r(t) = x(t)$, for $t \in [t_{r-1}, t_r]$, $r = 1, N$.

Introducing the additional parameters $\lambda_r = x_r(t_{r-1})$ and performing a replacement of the function $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ on each r -th interval, we obtain the following boundary value problem with parameters:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(t) \psi_k(s) (u_r(s) + \lambda_r) ds + f(t) \quad (3)$$

$$t \in (t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, N},$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = 1 \dots N \quad (4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_N + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t) = d \quad (5)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow t_p-0} u_p(t) - \lambda_{p+1} = 0, \quad p = 1 \dots N - 1 \quad (6)$$

where (6) are conditions for matching the solution at the interior points of the partition Δ_N . Note, that conditions (6) and integro-differential equations (3) also ensure the continuity of solution's derivatives at these points.

Using the fundamental matrix $X_r(t)$ of differential equation $dx/dt = A(t)x$ on $[t_{r-1}, t_r]$, we reduce the special Cauchy problem for the system of integro-differential equations with parameters (2.3), (2.4) to the equivalent system of integral equations.

$$\begin{aligned} u_r(t) = & X_r \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + \\ & + X_r \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(\tau) \psi_k(s) (u(s)_r + \lambda_r) ds d\tau + \\ & + X_r \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = 1 \dots N \end{aligned} \quad (7)$$

Introduce the notation

$$\mu_k = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) u_j(s) ds$$

Multiplying both sides of (7) by $\psi_p(t)$, integrating on the interval $[t_{r-1}, t_r]$ and summing up over r , we have the system of linear algebraic equations with respect to $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^{nm}$:

$$\mu_p = \sum_{k=1}^m G_{p,k}(\Delta_N) \mu_k + \sum_{r=1}^N V_{p,r}(\Delta_N) \lambda_r + g_p(f, \Delta_N), \quad p = 1 \dots m \quad (8)$$

with the $(n \times n)$ matrices

$$G_{p,k}(\Delta_N) = \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_r(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau) \phi_k(s) ds d\tau \tag{9}$$

$$V_{p,r}(\Delta_N) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau) A(s) ds d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_p(\tau) X_j(\tau) \int_{t_{j-1}}^{\tau} X_j^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) d\tau d\tau \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(s) ds \tag{10}$$

and vectors of dimension n

$$g_p(f, \Delta_N) = \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X_r(\tau) \int_{t_{r-1}}^{\tau} X_r^{-1}(\tau) f(s) ds d\tau \tag{11}$$

Using these matrices we can rewrite the system (8) in the form

$$[I - G(\Delta_N)]\mu = V(\Delta_N)\lambda + g(f, \Delta_N), \tag{12}$$

where I is the identity matrix of dimension nm.

Essential requirement to the partition is its regularity. Partition Δ_N is called regular if the matrix $I - G(\Delta_N)$ is invertible. It is established that the invertability of system's matrix is equivalent to the well-posedness of considered boundary value problem [2]. Assume the matrix $I - G(\Delta_N)$ is invertible and $[I - G(\Delta_N)]^{-1} = (M_{k,p}(\Delta_N))$. Then according to (12) the elements of the vector $\mu \in R^{nm}$ are determined by the equalities

$$\mu_k = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) \right) \lambda_j + \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) g_p(f, \Delta_N), \tag{13}$$

Substituting the right-hand side of (13) instead of μ_k , we get the representation of functions $u_r(t)$ via λ_j

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^m X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) \right.$$

$$\times \left[\sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] \lambda_j +$$

$$+ X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \lambda_r + X_r(t) \int_{t_{r-1}}^t X_r^{-1} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^m \phi_k(\tau) \sum_{p=1}^m M_{k,p}(\Delta_N) g_p(f, \Delta_N) + f(\tau) \right] d\tau, \tag{14}$$

Introduce notation

$$D_{r,j}(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{2n} X_r(t) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) \times \\ \times \left[\sum_{p=1}^{2n} M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] \quad (15)$$

$$D_{r,r}(\Delta) = \sum_{k=1}^{2n} X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) \phi_k(\tau) d\tau \times \\ \times \left[\sum_{p=1}^{2n} M_{k,p}(\Delta_N) V_{p,j}(\Delta_N) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s) ds \right] + \quad (16)$$

$$+ X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \\ F_r(\Delta_N) = \sum_{k=1}^{2n} X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) A(\tau) d\tau \sum_{p=1}^{2n} M_{k,p}(\Delta_N) g_p(f, \Delta_N) + \quad (17) \\ + \sum_{k=1}^{2n} X_r(t_r) \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_r^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, r = 1 \dots N,$$

Then from (14) we have

$$\lim_{t \rightarrow t_r - 0} u_r(t) = \sum_{j=1}^N D_{r,j}(\Delta_N) \lambda_j + F_r(\Delta_N). \quad (18)$$

Substituting the right-hand side of (18) into the boundary condition (5) and conditions of matching solution (6), we obtain the following system of linear algebraic equations with respect to parameters $\lambda_r, r = (1, N)$:

$$[B + CD_{N,1}(\Delta_N)] \lambda_1 + \sum_{j=2}^{N-1} CD_{N,j}(\Delta_N) \lambda_j + \\ + C[I + D_{N,N}(\Delta_N)] \lambda_N = d - CF_N(\Delta_N), \quad (19)$$

$$[I + D_{p,p}(\Delta_N)] \lambda_p - [I + D_{p,p+1}(\Delta_N)] \lambda_{p+1} + \\ + \sum_{j=1}^N D_{p,j}(\Delta_N) \lambda_j = -F_p(\Delta_N), p = 1 \dots N - 1 \quad (20)$$

By denoting the matrix corresponding to the left-hand side of the system of equations (19), (20) by Q, the system can be written as the following:

$$Q_*(\Delta_N) \lambda = -F_*(\Delta_N), \lambda \in R^{nN}, \quad (21)$$

where

$$F_*(\Delta_N) = \{-d + CF_N(\Delta_N), F_1(\Delta_N), \dots, F_{N-1}(\Delta_N)\} \in R^{nN} \tag{22}$$

Solving equation (21) we find λ and substitute it to (14) to calculate u . Finally, performing a replacement of the function $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$ on each r -th interval, we obtain the values of the vector function $x(t)$.

Consider the Cauchy problems for ordinary differential equations on subintervals.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + P(t), x(t_{r-1}) = 0, t \in [t_{r-1}, t_r], r = 1 \dots N \tag{23}$$

Here $P(t)$ is square matrix or vector of dimension n , continuous on $[0, T]$.

Let's denote the solution to the Cauchy problem (23) by $E_{*,r} = (A(\cdot), P(\cdot), t)$.

Solving the Cauchy problem for the ordinary differential equations we obtain $E_{*,r} = (A(\cdot), P(\cdot), t)$ and then evaluate the integrals

$$\hat{\psi}_{p,r} = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) dt, \hat{\psi}_{p,r}(A) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) E_{*,r}(A(\cdot), A(\cdot), t) dt \tag{24}$$

$$\hat{\psi}_{p,r}(f) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) E_{*,r}(A(\cdot), f(\cdot), t) dt, \hat{\psi}_{p,r}(\phi) = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi(t) E_{*,r}(A(\cdot), \phi(\cdot), t) dt$$

From the equalities (24) we calculate matrices G, V, g . Consequently we obtain the matrices Q, F and form the system of linear algebraic equations with respect to parameter λ . Solving composed equation we find the parameter λ . The Cauchy problems for ordinary differential equations for the found values of parameter we solve using Bulirsch–Stoer method [12]. Bulirsch–Stoer algorithm is a method for the numerical solution of ordinary differential equations which combines three powerful ideas: Richardson extrapolation, the use of rational function extrapolation in Richardson-type applications, and the modified midpoint method, to obtain numerical solutions to ordinary differential equations (ODEs) with high accuracy and comparatively little computational effort.

Now we consider on $[0, T]$ the linear boundary value problem for Fredholm integro-differential equation (1) and (2) with degenerate kernel, where

$$T = 1, m = 2, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}, B = -C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(2\pi t) - t \cos(2\pi t) + (t^4 \exp(t/4)) / (4\pi) \\ -2\pi \sin(2\pi t) - t^2 \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \exp(t/4) & t \\ t & 2t^2 \exp(t/4) \end{pmatrix}, \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^4}{2} \exp(t/4) & 0 \\ 0 & t^4 \exp(t/4) \end{pmatrix}$$

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi_2(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, n = 2$$

Here the matrix of differential part is variable and the construction of fundamental matrix breaks down. We use the numerical implementation of algorithm. For the integro-differential equation in the given problem any partition of interval $[0, T]$, including Δ_1 , is regular. Accuracy of solution depends on the accuracy of solving the Cauchy problem on subintervals and evaluating of definite integrals. Numerical solution for Cauchy problem and evaluation of definite integrals are implemented using

Bulirsch-Stoer method and Simpson's method, respectively. We provide the results of the numerical implementation of algorithm by partitioning the interval $[0, 1]$ with step $h = 0.5$ and partitioning the subintervals $[0, 0.5]$ and $[0.5, 1]$ with step $h_1 = h_2 = 0.05$.

t	$x_1^*(t)$	$x_2^*(t)$	t	$x_1^*(t)$	$x_2^*(t)$
0	-0.0000	0.0000	0.5000	1.0000	-1.0000
0.0500	0.3090	-0.3090	0.5500	0.9511	-0.9511
0.1000	0.5878	-0.5878	0.6000	0.8090	-0.8090
0.1500	0.8090	-0.8090	0.6500	0.5878	-0.5878
0.2000	0.9511	-0.9511	0.7000	0.3090	-0.3090
0.2500	1.0000	-1.0000	0.7500	0.0000	0.0000
0.3000	0.9511	-0.9511	0.8000	-0.3090	0.3090
0.3500	0.8090	-0.8090	0.8500	-0.5878	0.5878
0.4000	0.5878	-0.5878	0.9000	-0.8090	0.8090
0.4500	0.3090	-0.3090	0.9500	-0.9511	0.9511
0.5000	-0.0000	-0.0000	1.0000	-1.0000	1.0000

Here is $x_1^*(t)$ and $x_2^*(t)$ are approximate solutions of the integro-differential equation. Exact solution to the given problem is

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

and the following estimate is true

$$\max_{j=1..20} \|x(t_j) - x^*(t_j)\| < 0.000003552$$

whereas the results obtained from the Runge-Kutta 4th order method is:

$$\max_{j=1..20} \|x(t_j) - x^*(t_j)\| < 0.000003662$$

Moreover, Bulirsch-Stoer method showed better performance in terms of computation time: spent_time (Bulirsch-Stoer) = 3.1511s versus spent_time (Runge-Kutta 4) = 3.9654s, which is 25.8% faster.

REFERENCES

- [1] Nekrasov A. I. On a Class of Linear Integro- Differential Equations, Tr. Tsentr. Aerogidrodin. Inst. 190 (1934) 1-25.
- [2] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 294 (2016). P. 342-357.
- [3] Dzhumabaev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. USSR Comput. Maths. Math. Phys. 29 (1989) 34-46.
- [4] Dzhumabaev D.S. A Method for Solving the Linear Boundary Value Problem for an Integro-Differential Equation. Comput. Math. Math. Phys. 50 (2010) 1150-1161.
- [5] Dzhumabaev D.S. An Algorithm for Solving a Linear Two-Point Boundary Value Problem for an Integro-Differential Equation. Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013) 736-758.
- [6] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the Unique Solvability of a Linear Two-Point Boundary Value Problem for Systems of Integro-Differential Equations. Differential Equations, 49(2013) 914-937.
- [7] Bykov Ya. V. On Some Problems in the Theory of Integro-Differential Equations. Kirgiz. Gos. Univ., Frunze, 1957. [in Russian]
- [8] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations //Differential equations, - 2010. - 46. - № 4. - P. 553-567.
- [9] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations //Ukrainian Mathematical journal, - 2015. - 66. -№ 8. - P. 1200-1219.
- [10] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. On the unique solvability of the boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations with degenerate kernel // Journal of Mathematical Science. Vol. 220. No 4. 2017. P. 489-506.

[11] Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs //Differential equations, - 2015. - 51. - № 9. - P. 1180-1196.

[12] Bulirsch, R. and Stoer, J. Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag, 1991.

Д.С. Джумабаев¹, А.С. Жармагамбетов²

^{1,2}Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан,

¹БЖФМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ САНДЫҚ ӘДІСІ

Аннотация. Өзегі айныған Фредгольм интегро-дифференциалдық тендеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі ұсынылды. Аралықты N бөлікке бөлу және қосымша параметрлерді шешімнің бөлімшенің сол жақ нүктелеріндегі мәні ретінде еңгізу бастапқы есепті параметрлері бар интегро-дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін көпнүктелі шеттік есепке алып келеді. Параметрлердің бекітілген мәндерінде интегро-дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шешіледі. Қосымша параметрлерді енгізу шеттік есептің шешілімділігін енгізілген параметрлерге байланысты сызықтық алгебралық тендеулер жүйесінің шешілімділігіне келтіреді.

Бөлімшелердегі жәй дифференциалдық тендеулер үшін Коши есебі және анықталған интегралдарды есептеу ұсынылған әдістің негізгі қосалқы есептері болып табылады. Коши мәселелері Булирш –Штер әдісімен шешіледі және анықталған интегралдар Симпсон әдісімен есептеледі.

Кілттік сөздер. Фредгольм интегро-дифференциалдық тендеуі, сызықтық шеттік есеп, параметрлеу, Булирш-Штер әдісі.

Д.С. Джумабаев¹, А.С. Жармагамбетов²

^{1,2}Международный Университет информационных технологий, Алматы, Казахстан,

¹Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Аннотация. Предложен численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. Разбиение интервала на N частей и введение дополнительных параметров в качестве значений решения в левых точках подинтервалов исходную задачу сводит к многоточечной краевой задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. При фиксированных значениях параметров решаются специальные задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений. Введение дополнительных параметров позволяет нам разрешимость краевой задачи сводить к разрешимости системы линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и вычисление определенных интегралов на подинтервалах являются основными вспомогательными задачами предложенного метода. Задачи Коши решаются методом Булирша-Штера, а определенные интегралы вычисляются методом Симпсона.

Ключевые слова. Интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма, линейная краевая задача, параметризация, метод Булирша – Штера.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 12 – 17

UDK 517.956

A.T. Assanova¹, A.E. Imanchiev², Zh.M. Kadirbayeva¹

¹Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty,

²K.Zhubanov Aktobe regional state university, Aktobe,

E-mail: assanova@math.kz, imanchiev_ae@mail.ru, apelman86pm@mail.ru

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A MULTI-POINT
PROBLEM FOR SYSTEM OF THE LOADED
DIFFERENTIAL EQUATIONS HYPERBOLIC TYPE

Annotation. The nonlocal multi-point problem for the system of loaded differential equations of hyperbolic type second order is considered. The load lines in the system of equations and lines that given of the boundary conditions, can be arranged as you like. The considered problem is reduced to an equivalent multi-point problem with parameter by introducing a new unknown function instead of a loaded term in the system of equations. The problem with parameter consists of a nonlocal problem for a system of hyperbolic equations with parameter and the functional relation. Algorithms for finding an approximate solution of the equivalent problem with parameter are constructed and the conditions for their convergence are set. Sufficient conditions for the existence of unique solution to the problem with parameter are established. Conditions of existence of unique classical solution to the multi-point problem for the system of loaded differential equations of hyperbolic type are obtained in the terms of initial data. Earlier, the method of reduced to an equivalent family of problems for partial differential equations is applied to study of this problem. Sufficient conditions for the existence unique classical solution of this problem are find in the terms of some matrix compiled by the initial data.

This results are partially supported by grant of the Ministry education and science of Republic Kazakhstan No 0822 / ГФ4.

Key words: nonlocal multi-point problem, system of loaded differential equations, system of hyperbolic equations, parameter, algorithm, approximate solution, unique solvability.

Problem statement. Consider the nonlocal multi-point problem for the system of loaded differential equations of hyperbolic type second order on the rectangular domain $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x) + \sum_{i=1}^k \left\{ P_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=\theta_i} + Q_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=\theta_i} + S_i(x)u(\theta_i, x) \right\}, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m \left\{ K_j(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=t_j} + L_j(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_j} + M_j(x)u(t_j, x) \right\} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

where $u = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ is unknown function, the $(n \times n)$ matrices $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $P_i(x)$, $Q_i(x)$, $S_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, $K_j(x)$, $L_j(x)$, $M_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, the n vector functions $f(t, x)$, $\varphi(x)$ are continuous on Ω , $[0, \omega]$, respectively, the load lines $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{k-1} < \theta_k < T$, the

lines in the boundary condition $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$, n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0, T]$.

Let $C(\Omega, R^n)$ ($C([0, \omega], R^n)$) be a space of continuous on Ω ($[0, \omega]$) vector functions $u(t, x)$ ($\varphi(x)$) with norm $\|u\|_0 = \max_{(t,x) \in \Omega} \|u(t, x)\|$ ($\|\varphi\|_1 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi(x)\|$).

A function $u(t, x) \in C(\Omega, R^n)$, having the partial derivatives $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$ is called classical solution to problem (1)–(3), if its is satisfied of system (1) for all $(t, x) \in \Omega$, and boundary condition (2) and multi-point condition (3).

The questions for the existence of unique solution and the construction of algorithms for finding approximate solutions to problem (1)–(3) are investigated. Loaded partial differential equations arise in the study of various processes of physics, chemistry, biology, ecology and others [1-9]. A special role is played of a loaded hyperbolic equations and boundary value problems for them. Some classes nonlocal and boundary value problems for the loaded differential equations of hyperbolic type studied in the papers [10-14]. We can also find a bibliography and analysis results with respect to the loaded differential equations in the works [1-5]. Multi-point problems for the differential equations frequently appear in the study of natural science and engineering problems [15, 16]. Multi-point problems for the ordinary differential equations and equations of hyperbolic type are considered in the papers [17-22]. Questions of existence, uniqueness and continuous dependence of solution from data for the new classes of nonlocal problems for the system of loaded hyperbolic equations second-order are important and urgent problems of the theory of nonlocal problems for the loaded differential equations.

In present paper the results for nonlocal problems with integral conditions for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives are developed to a class of multi-point problems for the system of loaded hyperbolic equations. Algorithms of finding approximate solutions of multi-point problem for the system of loaded hyperbolic equations are constructed and their convergence is proved.

Reduction to an equivalent problem with parameter. We introduce a special loading function $L(x) = \sum_{i=1}^k \left\{ P_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=\theta_i} + Q_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=\theta_i} + S_i(x) u(\theta_i, x) \right\}$ and problem (1)–(3) is reduced to the following equivalent problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x) u + L(x) + f(t, x), \quad (4)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^m \left\{ K_j(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=t_j} + L_j(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_j} + M_j(x) u(t_j, x) \right\} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (6)$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^k \left\{ P_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=\theta_i} + Q_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=\theta_i} + S_i(x) u(\theta_i, x) \right\}, \quad x \in [0, \omega]. \quad (7)$$

A pair functions $(u^*(t, x), L^*(x))$, where $u^*(t, x) \in C(\Omega, R^n)$, $L^*(x) \in C([0, \omega], R^n)$, is called a solution to problem (4)–(7), if the function $u^*(t, x)$ has a partial derivatives $\frac{\partial u^*(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$,

$\frac{\partial u^*(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u^*(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, satisfies to system (4) for all $(t, x) \in \Omega$ and

$L(x) = L^*(x)$, the boundary condition (5), the multi-point condition (6) and relation for loading function (7) are valid.

At fixed $L(x)$ the problem (4)—(6) is nonlocal problem for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives [22]. In this work were studied of the questions for existence of unique classical solution to the investigated problem. Conditions of unique solvability to considered problem were established and the algorithms for finding its solutions are proposed. Further, for investigating to the problem (4)—(7) we applied the method of introduction functional parameters [23-38]. Problem (1)—(3) is studied in [39] by reducing the equivalent family of problems for partial differential equations with parameters.

Scheme of the method of introduction functional parameter. Introduce a new unknown parameter $\lambda(x)$ as value of function $u(t, x)$ for $t = 0$: $\lambda(x) = u(0, x)$. We replace $u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \lambda(x)$ in the problem (4)—(7) and pass to the following equivalent problem

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + C(t, x) \tilde{u} + A(t, x) \dot{\lambda}(x) + C(t, x) \lambda(x) + L(x) + f(t, x), \quad (8)$$

$$\tilde{u}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (9)$$

$$\tilde{u}(t, 0) = \psi(t) - \psi(0), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^m K_j(x) \dot{\lambda}(x) + \sum_{j=1}^m M_j(x) \lambda(x) + \sum_{j=2}^m \{K_j(x) \tilde{v}(t_j, x) + M_j(x) \tilde{u}(t_j, x)\} + \sum_{j=1}^m L_j(x) \tilde{w}(t_j, x) = \varphi(x),$$

$$x \in [0, \omega], \quad (11)$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^k \{P_i(x) \dot{\lambda}(x) + P_i(x) \tilde{v}(\theta_i, x) + Q_i(x) \tilde{w}(\theta_i, x) + S_i(x) \lambda(x) + S_i(x) \tilde{u}(\theta_i, x)\}, \quad x \in [0, \omega], \quad (12)$$

where $\tilde{v}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial x}$, $\tilde{w}(t, x) = \frac{\partial \tilde{u}(t, x)}{\partial t}$.

A triple functions $(\tilde{u}^*(t, x), \lambda^*(x), L^*(x))$, where $\tilde{u}^*(t, x) \in C(\Omega, R^n)$, $\lambda^*(x) \in C([0, \omega], R^n)$, $L^*(x) \in C([0, \omega], R^n)$, is called a solution to problem (8)—(12), if the function $\tilde{u}^*(t, x)$ has a partial derivatives $\frac{\partial \tilde{u}^*(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial \tilde{u}^*(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 \tilde{u}^*(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, satisfies of system (8) for all $(t, x) \in \Omega$ and $\lambda(x) = \lambda^*(x)$, $L(x) = L^*(x)$, the conditions on the characteristics (9), (10), relation for functional parameter (11) and relation for loading function (12) are true.

The initial data of problem satisfies of the compatibility condition in the point $(0, 0)$:

$$\lambda(0) = \psi(0). \quad (13)$$

At fixed $\lambda(x)$, $L(x)$ problem (8)—(10) is Goursat problem for the system of hyperbolic equations with mixed derivatives. Relations (11) and (12) allow us to determine of the unknown parameters $\lambda(x)$, $L(x)$.

Algorithms for finding approximate solution to problem (8)—(12). The solution to problem (8)—(12) is triple functions $(\tilde{u}^*(t, x), \lambda^*(x), L^*(x))$, which we determine as a limit of the sequence of triples functions $(\tilde{u}^{(s)}(t, x), \lambda^{(s)}(x), L^{(s)}(x))$, $s = 0, 1, 2, \dots$, based on the following algorithm:

Step 0. 1) Suppose that $\tilde{u}(t, x) = \psi(t) - \psi(0)$, $\tilde{v}(t, x) = 0$, $\tilde{w}(t, x) = \dot{\psi}(t)$, $L(x) = 0$ in the relation (11), and solving Cauchy problem for system of ordinary differential equations (11), (13) we find initial approximation of parameter $\lambda^{(0)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$. 2) Suppose that $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$,

$\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $L(x) = 0$ in the system (8) and solving Goursat problem for system of hyperbolic equations (8)—(10), we find $\tilde{u}^{(0)}(t, x)$ and its derivatives $\tilde{v}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(0)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega$. 3) From relation (12) for $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(0)}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(0)}(t, x)$, we determine initial approximation of loading function $L^{(0)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$. And so on.

Step s. 1) Suppose that $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(s-1)}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(s-1)}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(s-1)}(t, x)$, $L(x) = L^{(s-1)}(x)$ in the relation (11), and solving Cauchy problem for system of ordinary differential equations (11), (13) we find $\lambda^{(s)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$. 2) Suppose that $\lambda(x) = \lambda^{(s)}(x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(s)}(x)$, $L(x) = L^{(s-1)}(x)$ in the system (8) and solving Goursat problem for system of hyperbolic equations (8)—(10) we find $\tilde{u}^{(s)}(t, x)$ and its derivatives $\tilde{v}^{(s)}(t, x)$, $\tilde{w}^{(s)}(t, x)$ for all $(t, x) \in \Omega$. 3) From relation (12) for $\lambda(x) = \lambda^{(s)}(x)$, $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(s)}(x)$, $\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}^{(s)}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x) = \tilde{v}^{(s)}(t, x)$, $\tilde{w}(t, x) = \tilde{w}^{(s)}(t, x)$, we determine s th approximation of loading function $L^{(s)}(x)$ for all $x \in [0, \omega]$, $s = 1, 2, 3, \dots$

Conditions of the feasibility and convergence of the proposed algorithm are established. These conditions are also conditions of the existence unique solution to problem (8)—(12) and unique solvability to the original problem (1)--(3).

REFERENCES

- [1] Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology. M.: Vyshaiya shkola, **1995**. (in Russ.)
- [2] Dzhenaiev M.T. To the theory linear boundary value problems for loaded differential equations. Almaty: Computenryi centr ITPM, **1995**. (in Russ.)
- [3] Nakhushev A.M. Problems with replacement for partial differential equations. M.: Nauka, **2006**. (in Russ.)
- [4] Dzhenaiev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equations as perturbations of differential equations. Almaty: Gylym, **2010**. (in Russ.)
- [5] Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. M.: Nauka, **2012**. (in Russ.)
- [6] Bakirova E.A. About of a criteria of unique solvability of two-point boundary value problem for system of loaded differential equations // Izvestiya NAN RK. Ser.phyz.-matem. **2005**. No 1. P.95-102. (in Russ.)
- [7] Bakirova E.A. About of a necessary and sufficient conditions of unique solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Mathematical journal. **2005**. Vol. 5. No 3. P.25-34. (in Russ.)
- [8] Kadirbayeva Zh.M. About of one algorithm for finding solution of linear two-point boundary value problem for loaded differential equations // Mathem. journal. **2009**. Vol.9. No 2(32). P.64-70. (in Russ.)
- [9] Kadirbayeva Zh.M. About of a necessary and sufficient conditions of unique solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Mathem. journal. **2009**. Vol.9. No 4(34). P.63-71. (in Russ.)
- [10] Pul'kina L.S. Nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation // Trudy MIRAN im.V.A.Steklova. **2002**. Vol.236. P.298-303. (in Russ.)
- [11] Volynskaiya M.G. About of solvability of one mixed problem for a loaded hyperbolic equation // Vestnik SamGU. Estestvenno-nauchn. seria. **2008**. No 6(65). P.40-49. (in Russ.)
- [12] Dzhumabaev D.S. Kadirbayeva Zh.M. On the one approximate method for finding solution of semi-periodic boundary value problem for system of loaded hyperbolic equations // Vestnik KazNU im. al-Farabi. Ser. mathem., mech., inf. **2010**. No 1. P.105-112. (in Russ.)
- [13] Kadirbayeva Zh.M. About of unique solvability of linear nonlocal boundary value problem for system of loaded hyperbolic equations // Izvestiya NAN RK. Ser.phyz.-matem. **2011**. No 5(279). P.19-23. (in Russ.)
- [14] Kadirbayeva Zh.M. On the one approximate method for finding solution of nonlocal boundary value problem for systems of loaded hyperbolic equations // Vestnik KazNU im. al-Farabi. Ser. mathem., mech., inf. **2014**. No 5. P.56-67. (in Russ.)
- [15] Ptachnyk B.I. Ill-posed boundary problems for partial differential equations. Kiev: Nauk. dumka, **1984**. (in Russ.)
- [16] Kiguradze I.T. Boundary value problems for systems of ordinary differential equations // Sovremennye problemy matematiki. Noveishie dostizhenia. M.: Nauka, **1987**. Vol. 30. P.3-103. (in Russ.)
- [17] Mitropol'skii Yu.A., Urmancheva L.B. On the two-point problem for systems of hyperbolic equations // Ukrainian Mathematical Journal. **1990**. Vol.42. No 12. P.1657-1663. (in Russ.)
- [18] Urmancheva L.B. Two-point and multi-point problems for systems of partial differential equations hyperbolic type. Institute of mathematics NASU. Kiev. -1993. Preprint 93.2. 40 p. (in Russ.)
- [19] Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. Correct solvability of linear multi-point boundary value problem // Mathematical

journal. **2005**. Vol.5. No 1(15). P.30-38. (in Russ.)

[20]Asanova A.T. On the solvability of a family multi-point boundary value problems for a differential equations and their applications to the nonlocal boundary value problems // *Mathematical journal*. **2013**. Vol.13. No 3(49). P.43-55. (in Russ.)

[21]Asanova A.T. Multipoint problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. **2016**. Vol. 212. No 3. P. 213-233.

[22]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations // *Eurasian Mathematical Journal*. **2015**. Vol. 6. No 4. P. 19-28.

[23]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. **2002**. Vol. 42. No 11. P. 1609-1621.

[24]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations // *Doklady Mathematics*. **2003**. Vol. 68. No 1. P. 46-49.

[25]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Unique solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // *Differential Equations*. **2003**. Vol. 39. - No 10. P. 1414-1427.

[26]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // *Ukrainian Mathematical Journal*. **2004**. Vol. 56. No 4. P. 682-694.

[27]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // *Differential Equations*. **2005**. Vol. 41. No 3. P. 352-363.

[28]Asanova A.T. A nonlocal boundary value problem for systems of quasilinear hyperbolic // *Doklady Mathematics*. **2006**. Vol. 74. No 3. P. 787-791.

[29]Asanova A.T. On the unique solvability of a family of two-point boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // *Journal of Mathematical Sciences*. **2008**. Vol. 150. No 5. P. 2302-2316.

[30]Asanova A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations // *Differential Equations*. **2009**. Vol. 45. No 3. P. 385-394.

[31]Asanova A.T. On a boundary-value problem with data on non-characteristic intersecting lines for systems of hyperbolic equations with mixed derivative // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. **2012**. Vol. 187. No 4. P. 375-386.

[32]Asanova A.T. On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // *Ukrainian Mathematical Journal*. **2013**. Vol. 65. No 3. P. 349-365.

[33]Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **2013**. Vol. 402. No 1. P. 167-178.

[34]Asanova A.T. On a solvability of the nonlocal problem with integral conditions for system of the equations of hyperbolic type // *Mathematical journal*. **2014**. Vol. 14. No 2 (52). P. 21-35. (in Russ.)

[35]Asanova A.T. Well-posed solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with impulse effects // *Ukrainian Mathematical Journal*. **2015**. Vol. 67. No 3. P. 333-346.

[36]Asanova A.T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. **2015**. No 63. P. 1-13.

[37]Asanova A.T. Criteria of solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives // *Russian Mathematics*. **2016**. Vol. 60. No 1. P. 1-17.

[38]Assanova A.T. On the solvability of nonlocal boundary value problem for the systems of impulsive hyperbolic equations with mixed derivatives // *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*. **2016**. Vol. 5. No 2. P. 153-165.

[39]Assanova A.T., Imanchiev A.E. On the solvability of a nonlocal boundary value problems for a loaded hyperbolic equations with multi-point conditions // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series*. **2016**. No 1(81). P. 15-25. (in Russ.)

А.Т. Асанова¹, А.Е. Иманчиев², Ж.М. Кадирбаева¹

¹Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

²Актюбинский Региональный Государственный университет имени К.Жубанова, г.Актобе

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается нелокальная многоточечная задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка. Линии нагрузки в системе уравнений и линии, в которых задаются краевые условия, могут располагаться как угодно. Путем введения новой неизвестной функции вместо нагруженной слагаемой исследуемая задача сведена к эквивалентной многоточечной задаче с параметром. Задача с параметром состоит из нелокальной задачи для системы гиперболических уравнений с параметром и функционального соотношения. Построены алгоритмы нахождения приближенного решения эквивалентной задачи с параметром и найдены условия их сходимости. Установлены достаточные условия

существования единственного решения задачи с параметром. Получены условия существования единственного классического решения многоточечной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического типа в терминах исходных данных. Ранее к исследованию рассматриваемой задачи был применен метод сведения к эквивалентному семейству задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Были найдены достаточные условия существования единственного классического решения исследуемой задачи в терминах некоторой матрицы, составляемой по исходным данным.

Ключевые слова: нелокальная многоточечная задача, система нагруженных дифференциальных уравнений, система гиперболических уравнений, параметр, алгоритм, приближенное решение, однозначная разрешимость.

А.Т. Асанова¹, А.Е. Иманчиев², Ж.М. Қәдірбаева¹

¹БЖФМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

²Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе Өңірлік Мемлекеттік университеті, Ақтөбе қ.

ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Екінші ретті гиперболалық тектес жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал көпнүктелі есеп қарастырылады. Жүктеу сызықтары мен шеттік шарттар берілген сызықтар кез келген түрде орналасуы мүмкін. Жүктелген қосылғыштың орнына жаңа белгісіз функция енгізу жолымен зерттеліп отырған есеп пара-пара көпнүктелі параметрі бар есепке келтірілген. Параметрі бар есеп гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін параметрі бар бейлокал есептен және функционалдық қатынастан тұрады. Параметрі бар пара-пара есептің жуық шешімін табу алгоритмдері тұрғызылған және олардың жинақтылық шарттары табылған. Параметрі бар есептің жалғыз шешімінің бар болуының жеткілікті шарттары тағайындалған. Гиперболалық тектес жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған. Қарастырылып отырған есепті зерттеу үшін бұрын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін есептер әулетіне келтіру әдісі пайдаланылған болатын. Зерттеліп отырған есептің жалғыз классикалық шешімінің бар болуының шарттары бастапқы берілімдер арқылы тұрғызылатын матрица терминінде табылған.

Кілттік сөздер: бейлокал көпнүктелі есеп, жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі, гиперболалық теңдеулер жүйесі, параметр, алгоритм, жуық шешім, бірімәнді шешілімділік.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 18 – 26

УДК 517.948.34

M. K. Dauylbayev¹, D. S. Dzhumabaev², N. Atakhan¹

¹(Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.) dmk57@mail.ru;

²Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan)
dzhumabaev@list.ru

**ASYMPTOTICAL REPRESENTATION OF SINGULARLY
PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Annotation. We consider the two-point boundary value problem for the singularly perturbed higher order linear integro-differential equation. An asymptotic in a small parameter representation of the solution is obtained. It is shown that the solution has the phenomenon of the m -th order initial jump at the point $t = 0$.

Keywords: singularly perturbation, integro-differential equations, small parameter, initial jump.

1. Introduction

Applied mathematics studies natural processes using mathematical models for them. Any mathematical model is somewhat approximate. It is not absolutely adequate for the process it describes. Deriving the mathematical model, one tries to capture all essential, dominant feature of the process. On the other hand, the model should be “simple” enough to allow the analytical and/or numerical treatment leading to the information one wants to obtain about the process. A variety of models in physics, chemical kinetics, mathematical biology, and many other fields are quite naturally formulated in terms of differential equations. During the derivation of the model equation, some terms whose influence on the process is supposed to be negligible are often not taken into account. As a result, the model might be simplified considerably. Such simplifications often rely on physical intuition.

Perturbations that occur in different problem can be formally divided into two classes: *regular perturbations* and *singular perturbations*. Before giving formal definitions, we mention that the primary qualitative difference between these two kinds of perturbations is that regular perturbations lead to small changes from the solution of the unperturbed problem. Unlike such regular perturbations, singular perturbations, thought to be small sense, cause considerable change in the solutions.

Theory of asymptotic integration of singularly perturbed equations has become purposefully developed starting with the works of L. Schlesinger [1], G. D. Birkhoff [2], P. Noaillon [3]. In a further development of the main trends of the theory W. Wasow [4], A. N. Tikhonov [5], M. I. Vishik, L. A. Lusternik [6, 7], R. O’Malley [8], A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov [9], K. A. Kassymov [10, 11] and others have made a significant contribution. In the works of M. I. Vishik, L. A. Lyusternik [6] and K. A. Kassymov [11] first studied initial problems for singularly perturbed nonlinear equations of the second order with unbounded initial conditions when the small parameter tends to zero. These problems are called the Cauchy problems with an initial jump. In these problems, the solutions of singularly perturbed equations tend to the solutions of the degenerate equations with the modified initial conditions. The Cauchy problems with initial jumps for integro-differential equations was considered in [12, 13].

The present work is devoted to research asymptotic in the small parameter the behavior of solutions of the unseparated two-point boundary value problem for a singularly perturbed linear integro-differential equations of n -th order with integral terms of Fredholm type, we have that the solution of the boundary value problem has m -th order initial jump at point $t=0$. Boundary problems for singularly perturbed

integro-differential equations of higher order with the initial jump of the m_1 – th order was considered in [14].

2. Statement of the problem Preliminary materials

Consider the following singularly perturbed integro-differential equation

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m+1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx, \quad (1)$$

with boundary conditions

$$h_i y(t, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^m \alpha_{ij} y^{(j)}(0, \varepsilon) + \sum_{j=0}^r \beta_{ij} y^{(j)}(1, \varepsilon) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad m < n-1, \quad r < n-1, \quad (2)$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, a_i \in R$ are known constants, independent of ε .

Assume that the following conditions hold:

I. Functions $A_i(t), F(t), i = \overline{1, n}$, are sufficiently smooth and defined on the interval $[0, 1]$;

II. $A_1(t) \geq \gamma = \text{const} > 0, 0 \leq t \leq 1$;

III. Functions $H_i(t, x), i = \overline{0, m+1}$ are defined in the domain $D = (0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$ and sufficiently smooth;

$$\text{IV. } \bar{\Delta} = \begin{vmatrix} h_1 y_{10}(t) & \dots & h_1 y_{n-1,0}(t) & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n y_{10}(t) & \dots & h_n y_{n-1,0}(t) & \alpha_{nm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

For the fundamental system of solutions of singularly perturbed homogeneous differential equation

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = 0 \quad (3)$$

the following asymptotic representation holds as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} y_i^{(j)}(t, \varepsilon) = y_{i0}^{(j)}(t) + O(\varepsilon), & i = \overline{1, \dots, n-1}, \quad j = \overline{0, \dots, n-1}, \\ y_n^{(j)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \cdot (\mu^j(t) y_{n0}(t) + O(\varepsilon)), & j = \overline{0, \dots, n-1}, \end{cases} \quad (4)$$

where $\mu(t) = -A_1(t) < 0$, functions $y_{i0}(t), i = \overline{0, \dots, n-1}$ are solutions of the problem:

$$L_0 y_{i0} \equiv A_1(t)y_{i0}^{(n-1)}(t) + \dots + A_n(t)y_{i0}(t) = 0, \quad y_{i0}^{(j)}(0) = \delta_{i-1, j}, \quad i = \overline{1, \dots, n-1}, \quad j = \overline{0, \dots, n-2},$$

and

$$y_{n0}(t) = (A_1(0)/A_1(t))^{n-1} \exp\left(\int_0^t (A_2(x)/A_1(x)) dx\right). \quad (5)$$

The proof of the formulas (4) are readily obtained from the known theorems of L. Schlesinger [1], D. Birkhoff [2] and G P. Noaillon [3].

Let the function $K(t, s, \varepsilon)$, $0 \leq s \leq t \leq 1$, be a solution of the following problem:

$$L_\varepsilon K(t, s, \varepsilon) = 0, \quad K^{(j)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad j = 0, \dots, n-2, \quad K^{(n-1)}(s, s, \varepsilon) = 1.$$

Function $K(t, s, \varepsilon)$ is called the Cauchy function. Function $K(t, s, \varepsilon)$ can be represented as

$$K(t, s, \varepsilon) = \frac{W_n(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)}, \tag{6}$$

where $W(s, \varepsilon)$ is the Wronskian of the fundamental solution system $y_1(s, \varepsilon), \dots, y_n(s, \varepsilon)$ for equation (4), and $W_n(t, s, \varepsilon)$ is the n-th order determinant obtained from the Wronskian $W(s, \varepsilon)$ by replacing the n-th row with the fundamental set of solutions $y_1(t, \varepsilon), \dots, y_n(t, \varepsilon)$.

For the Cauchy function $K(t, s, \varepsilon)$ in view (4), (6), the following asymptotic representation holds as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$K^{(j)}(t, s, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\overline{W}_{n-1}^{(j)}(t, s)}{\mu(s)\overline{W}(s)} + \varepsilon^{n-1-j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right) \frac{\mu^j(t)y_{n0}(t)}{\mu^{n-1}(s)y_{n0}(s)} + O\left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{n-j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right)\right), \quad j = 0, \dots, n-1, \tag{7}$$

where $\mu(t) = -A_1(t) < 0$, $y_{n0}(t)$ is given by (5), the determinant $\overline{W}(s)$ is the Wronskian of the fundamental solution system $y_{10}(s), \dots, y_{n-1,0}(s)$ of equation (3), and $\overline{W}_{n-1}^{(j)}(t, s)$ is the determinant obtained from $\overline{W}(s)$ by replacing the $(n-1)$ th row with $y_{10}(t), \dots, y_{n-1,0}(t)$.

From (7) we obtain the following asymptotic estimations:

$$\left|K^{(j)}(t, s, \varepsilon)\right| \leq C\varepsilon, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad \left|K^{(n-1)}(t, s, \varepsilon)\right| \leq C\left(\varepsilon + \exp\left(-\frac{\gamma(t-s)}{\varepsilon}\right)\right), \tag{8}$$

where $C > 0$ is a constant independent of ε .

Let functions $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$ are solutions of the following problem:

$$L_\varepsilon \Phi_i(t, \varepsilon) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad h_k \Phi_i(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Functions $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, are called boundary functions and can be represented in the form:

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = \frac{\Delta_i(t, \varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{10}$$

where $\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_1 y_n(t, \varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_n y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_n y_n(t, \varepsilon) \end{vmatrix}$, $\Delta_i(t, \varepsilon)$ is the determinant obtained from $\Delta(\varepsilon)$ by replacing

the i -th row by the system of fundamental solutions $y_1(t, \varepsilon), \dots, y_n(t, \varepsilon)$ of equation (3). For the determinant $\Delta(\varepsilon)$, using formulas (2) and (4), we obtain the following asymptotic representation as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} \mu^m(0) \bar{\Delta} (1 + O(\varepsilon)), \quad (11)$$

where $\bar{\Delta}$ is the determinant given by the condition (IV).

For the boundary functions $\Phi_i(t, \varepsilon), i=1, \dots, n$, from (10) in view (4), (11) we obtain asymptotic representation as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(j)}(t, \varepsilon) = & \frac{\bar{\Delta}_i^{(j)}(t)}{\bar{\Delta}} + (-1)^{i+n} \varepsilon^{m-j} \cdot \frac{y_{n0}(t) \mu^j(t) \bar{\Delta}_i}{\mu^m(0) \bar{\Delta}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) + \\ & + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{m+1-j} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=0, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (12)$$

where $\bar{\Delta}_i^{(j)}(t)$ is the determinant obtained from $\bar{\Delta}$ by replacing the i -th row with the row $y_{10}^{(j)}(t), \dots, y_{n-1,0}^{(j)}(t), 0$, and $\bar{\Delta}_i, i=1, \dots, n$, are determinants obtained from the matrix $\begin{pmatrix} h_1 y_{10}(t) & \dots & h_1 y_{n-1,0}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_n y_{10}(t) & \dots & h_n y_{n-1,0}(t) \end{pmatrix}$ by deleting the i -th row.

The proof of the (12) follows from (10) if one takes into account (2), (4), and (11).

Then for boundary functions $\Phi_i(t, \varepsilon), i=1, \dots, n$, we obtain the following asymptotic estimations as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\left| \Phi_i^{(j)}(t, \varepsilon) \right| \leq C + C \varepsilon^{m-j} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad j=0, \dots, n-1; \quad i=1, \dots, n, \quad (13)$$

where $C > 0$ is a constant independent of ε .

3. Main results

We seek the solution of the boundary value problem (1) and (2) in the form:

$$y(t, \varepsilon) = C_1 \Phi_1(t, \varepsilon) + \dots + C_n \Phi_n(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (14)$$

where $\Phi_i(t, \varepsilon), i=1, \dots, n$ are boundary functions and expressed by the formula (10), function $K(t, s, \varepsilon)$ is the Cauchy function can be represented by the formula (6), $C_i, i=1, \dots, n$ are unknown constants, $z(t, \varepsilon)$ is an unknown function. Substituting (14) into equation (1) we obtain that $z(t, \varepsilon)$ satisfies the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$z(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) + \int_0^1 H(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (15)$$

where

$$f(t, \varepsilon) = F(t) + \sum_{i=1}^n C_i \int_0^1 \sum_{j=0}^{m+1} H_j(t, x) \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx, \quad (16)$$

$$H(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \sum_{j=0}^{m+1} H_j(t, x) K^{(j)}(x, s, \varepsilon) dx$$

Assume that the following condition is valid.

V. $\lambda = 1$ is not an eigenvalue of the kernel $H(t, s, \varepsilon)$.

In view of the condition V integral equation (15) has an unique solution that can be represented in the form

$$z(t, \varepsilon) = \bar{F}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^n C_i \bar{\varphi}_i(t, \varepsilon), \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{F}(t, \varepsilon) &\equiv F(t) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) F(s) ds, \\ \bar{\varphi}_i(t, \varepsilon) &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{m+1} \bar{H}_j(t, x, \varepsilon) \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{H}_j(t, x, \varepsilon) = H_j(t, x) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) H_j(s, x) ds, \quad j = 0, \dots, m+1$$

and $R(t, s, \varepsilon)$ is a resolvent of the kernel $H(t, s, \varepsilon)$ such that

$$R(t, s, \varepsilon) = \bar{R}(t, s) + O(\varepsilon), \quad (19)$$

where $\bar{R}(t, s)$ is a part of $R(t, s, \varepsilon)$ independent of ε . The last representation can be obtained easily by using (9), (16) and boundedness of the kernel $H(t, s, \varepsilon)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Use (17) in the right-hand side of (14) to obtain the solution of the boundary value problem (1) and (2) in the form

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n C_i(\varepsilon) Q_i(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (20)$$

where

$$Q_i(t, \varepsilon) = \Phi_i(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) ds, \quad P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds \quad (21)$$

Now, we determine unknown constants $C_i(\varepsilon), i = 1, \dots, n$. For determining these constants we substitute (20) into (2). Thus, we need to solve the system of algebraic equations

$$\begin{cases} C_1 (1 + d_{11}(\varepsilon)) + C_2 d_{12}(\varepsilon) + \dots + C_n d_{1n}(\varepsilon) = a_1 - e_1(\varepsilon), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_1 d_{n1}(\varepsilon) + C_2 d_{n2}(\varepsilon) + \dots + C_n (1 + d_{nn}(\varepsilon)) = a_n - e_n(\varepsilon), \end{cases} \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} d_{ik}(\varepsilon) &= \sum_{j=0}^r \frac{\beta_{ij}}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_k(s, \varepsilon) ds, \quad i, k = 1, \dots, n, \\ e_i(\varepsilon) &= \sum_{j=0}^r \frac{\beta_{ij}}{\varepsilon} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

In view of (7), (18), (19), we have following asymptotic representations as $\varepsilon \rightarrow 0$

$$d_{ik}(\varepsilon) = \bar{d}_{ik} + O(\varepsilon), \quad i, k = 1, \dots, n, \quad e_i(\varepsilon) = \bar{e}_i + O(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, n, \quad (23)$$

where

$$\bar{d}_{ik} = \sum_{j=0}^r \beta_{ij} \int_0^1 \frac{\bar{W}_{n-1}^{(j)}(1, s)}{\mu(s) \bar{W}(s)} \bar{H}_k(s) ds, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (24)$$

$$\bar{e}_i = \sum_{j=0}^r \beta_{ij} \int_0^1 \frac{\bar{W}_{n-1}^{(j)}(1, s)}{\mu(s) \bar{W}(s)} \bar{F}(s) ds, \quad i = 1, \dots, n,$$

the functions $\bar{H}_k(t)$, $\bar{H}_i(t, x)$, and $\bar{F}(t)$ have the form

$$\begin{aligned} \bar{H}_k(t) &\equiv (-1)^{k+n+1} \frac{\bar{\Delta}_k}{\Delta} \bar{H}_{m+1}(t, 0) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{m+1} \bar{H}_j(t, x) \frac{\bar{\Delta}_k^{(i)}(x)}{\Delta} dx, \quad k = 1, \dots, n, \\ \bar{H}_i(t, x) &\equiv H_i(t, x) + \int_0^1 \bar{R}(t, s) H_i(s, x) ds, \quad i = 0, \dots, m+1, \\ \bar{F}(t) &\equiv F(t) + \int_0^1 \bar{R}(t, s) F(s) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

For the main determinant $\omega(\varepsilon)$ of the system (22) in view (8), (21), (23) we have asymptotic representation as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\omega(\varepsilon) = \bar{\omega} + O(\varepsilon),$$

$$\text{where } \bar{\omega} = \begin{vmatrix} 1 + \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \dots & \bar{d}_{1n} \\ \bar{d}_{21} & 1 + \bar{d}_{22} & \dots & \bar{d}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{d}_{n1} & \bar{d}_{n2} & \dots & 1 + \bar{d}_{nn} \end{vmatrix}.$$

Assume that the following conditions is valid:

VI. $\bar{\omega} \neq 0$.

Thus, in view of condition I-VI, the singularly perturbed boundary value problem (1) and (2) has a unique solution $y(t, \varepsilon)$, which can be presented in the following form

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n C_i(\varepsilon) Q_i(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \quad (26)$$

where $Q_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, and $P(t, \varepsilon)$, defined by the formula (21), $C_i(\varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, are the solutions of the system (22).

Then the following theorem is valid.

Theorem. If conditions I-VI are fulfilled, then for the solution $y(t, \varepsilon)$ of the boundary value problem (1) and (2), and its derivatives the following asymptotic representations hold as $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$y^{(q)}(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}} \left[\frac{\bar{\Delta}_i^{(q)}(t)}{\bar{\Delta}} + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \left(\int_0^{m+1} \sum_{j=0} \bar{H}_j(s, x) \frac{\bar{\Delta}_i^{(j)}(x)}{\bar{\Delta}} dx + (-1)^{i+n+1} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \bar{H}_{m+1}(s, 0) \right) ds + \right. \\ \left. + (-1)^{i+n} \varepsilon^{m-q} \frac{y_{n0}(t)\mu^q(t)}{\mu^m(0)} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \right] + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \bar{F}(s) ds + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{m+1-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right),$$

$$q = 0, \dots, m,$$

$$y^{(q)}(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}} \left[\frac{\bar{\Delta}_i^{(q)}(t)}{\bar{\Delta}} + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \left(\int_0^{m+1} \sum_{j=0} \bar{H}_j(s, x) \frac{\bar{\Delta}_i^{(j)}(x)}{\bar{\Delta}} dx + (-1)^{i+n+1} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \bar{H}_{m+1}(s, 0) \right) ds + \right. \\ \left. + (-1)^{i+n} \frac{y_{n0}(t)\mu^q(t)}{\varepsilon^{q-m}\mu^m(0)} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \right] + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \bar{F}(s) ds + O\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{q-m-1}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right),$$

$$q = m+1, \dots, n-2, \quad (27)$$

$$y^{(n-1)}(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}} \left[\frac{\bar{\Delta}_i^{(n-1)}(t)}{\bar{\Delta}} + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(n-1)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \left(\int_0^{m+1} \sum_{j=0} \bar{H}_j(s, x) \frac{\bar{\Delta}_i^{(j)}(x)}{\bar{\Delta}} dx + (-1)^{i+n+1} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \bar{H}_{m+1}(s, 0) \right) ds + \right. \\ \left. + (-1)^{i+n} \varepsilon^{m-n+1} \frac{y_{n0}(t)\mu^{n-1}(t)}{\mu^m(0)} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) \right] + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(n-1)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \bar{F}(s) ds - \frac{\bar{F}(t)}{\mu(t)} + \\ + \frac{y_{n0}(t)\mu^{n-1}(t)}{\varepsilon^{n-1-m}\mu^n(0)} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) + O\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{n-2-m}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right).$$

Proof. By means of (7), (12), (16), (18), (19) and (25), we obtain the following asymptotic representation as $\varepsilon \rightarrow 0$ for functions $Q_i(t, \varepsilon), i = 1, \dots, n$, and $P^{(q)}(t, \varepsilon), q = 0, \dots, n-1$, defined in (21):

$$Q_i^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{\bar{\Delta}_i^{(q)}(t)}{\bar{\Delta}} + \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \left[\int_0^{m+1} \sum_{j=0} \bar{H}_j(s, x) \frac{\bar{\Delta}_i^{(j)}(x)}{\bar{\Delta}} dx + (-1)^{i+n+1} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \bar{H}_{m+1}(s, 0) \right] ds + \\ + (-1)^{i+n} \varepsilon^{m-q} \frac{y_{n0}(t)\mu^q(t)}{\mu^m(0)} \frac{\bar{\Delta}_i}{\bar{\Delta}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{m+1-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right)\right),$$

$$i = 1, \dots, n, q = 0, \dots, n-1, \quad (28)$$

$$P^{(q)}(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\mu(s)\bar{W}(s)} \bar{F}(s) ds + O(\varepsilon), \quad q = 0, \dots, n-2,$$

$$P^{(n-1)}(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{\overline{W}_t^{(n-1)}(t, s)}{\mu(s)\overline{W}(s)} \overline{F}(s) ds - \frac{\overline{F}(t)}{\mu(t)} + \frac{y_{n0}(t)\mu^{n-1}(t)}{\mu^n(0)} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu(x) dx\right) + O(\varepsilon)$$

In view of (23), (24) $C_i(\varepsilon)$ can be asymptotically represented in the form

$$C_i(\varepsilon) = \frac{\overline{\omega}_i}{\overline{\omega}} + O(\varepsilon), i = 1, \dots, n, \quad (29)$$

where $\overline{\omega}_i$ is the determinant obtained from $\overline{\omega}$ by substituting the i -th column by $\begin{pmatrix} a_1 - \overline{e}_1 \\ \dots \\ a_n - \overline{e}_n \end{pmatrix}$.

From (20) in view (7), (12), (28), (29) we obtain asymptotic representation (27). Theorem is proved.

From asymptotic representation (27) it follows that the solution of the boundary value problem (1) and (2) at the point $t=0$ has the pole of ε :

$$y^{(j)}(0, \varepsilon) = O(1), j = \overline{0, m}, y^{(m+j)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^j}\right), j = \overline{1, n-1-m}, \varepsilon \rightarrow 0.$$

In this case, we say that the solution of the boundary value problem (1) and (2) at the point $t = 0$ has the phenomenon of the m -th order initial jump.

REFERENCES

- [1] Schlesinger L. (1907), "Über asymptotische darstellungen der lösungen linearer differentialsysteme als funktionen eines parameters," *Mathematische Annalen*, vol. 63, no. 3, pp. 277-300.
- [2] Birkhoff G. D. (1908), "On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 9, no. 2, pp. 219-231.
- [3] Noaillon P. (1912), "Developpements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à paramètre variable," *Mem. Soc. Sci. Liege*, vol. 3, no 11, p. 197.
- [4] Wasow W. (1956), Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order, *Comm. On Pure and Appl. Math.*, 9, 93-113.
- [5] Tihonov A.N. (1950), O sistemah differencial'nyh uravnenij, soderzhashhij parametry, *Matematicheskij sbornik*, 27(69), 147-156, (In Russian).
- [6] Vishik I. and Lyusternik, L.A. (1960), On the initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 132(6), 1242-1245, (in Russian).
- [7] Vishik M.I. and Lyusternik, L.A. (1957), (1962), Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter multiplying the highest derivatives, *Usp. Mat. Nauk*, 12, 3-122, (In Russian), *Amer. Math. Soc. Transl.*, 20(2), 239-364.
- [8] O'Malley R. (1991), *Singular perturbations methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [9] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. and Kalachev L. (1995), The boundary function method for singular perturbation problems, *SIAM, Studies in Applied Mathematics*, 83-161, SIAM, Philadelphia.
- [10] Kassymov K.A. (1962), Ob asimptotike reshenija zadachi Koshi s bol'shimi nachal'nymi uslovijami dlja nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravnenija, soderzhashhego malyj parametr, *Uspehi matematicheskijh nauk*, 17, vyp. 5, 187-188
- [11] Kassymov K.A. (1968), O zadache s nachal'nym skachkom dlja nelinejnyh sistem differencial'nyh uravnenij, soderzhashhij malyj parametr, *DAN SSSR.*, 179, Vyp. 2, 275-278, (in Russian).
- [12] Kassymov K.A., Dauylbayev M.K. (1999) An estimate of solution of the Cauchy problem with initial jumps of arbitrary order for linear singularly perturbed integro-differential equations // *Differential equations*. Moscow. V. 35, № 6. P. 822 - 830. (in Russian).
- [13] Dauylbayev M.K. (2000) The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations. / *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 41, No. 1, P. 49-60.
- [14] Dauylbayev M.K. and Atakhan N. (2015), The initial jumps of solutions and integral terms in singular BVP of linear higher order integro-differential equations, *Miskolc Mathematical Notes*, Vol. 16, № 2, pp. 747-761.

М. К. Дауылбаев, Д.С. Джумабаев, Н. Атахан

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)
(Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрим краевую задачу по двум точкам для сингулярно возмущенного линейного интегро-дифференциального уравнения высшего порядка. Асимптотические представления решения по малому параметру получены. Показано, что решение имеет m -го начального скачка в точке $t = 0$.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, интегро-дифференциальное уравнение, малый параметр, начальный скачок.

М.К. Дауылбаев, Д.С. Джумабаев, Н. Атахан

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)
(Математика және математикалық моделдеу институты Алматы, Республика Казахстан)

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУГЕ АРНАЛҒАН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ БЕЙНЕЛЕУІ

Аннотация. Біз сингулярлы ауытқыған жоғары ретті интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған екі нүктелі шекаралық есеп қарастырымыз. Шешімінің кіші параметрмен асимптотикалық жіктелуі алынады. Бұл жерде шешімнің $t = 0$ нүктесінде m -шы ретті бастапқы секірісі бар екені көрсетілген.

Кілт сөздер: сингулярлы ауытқу, интегралды-дифференциалдық теңдеулер, кіші параметр, бастапқы секіріс.

Сведения об авторе:

Муратхан Дауылбаев - КазНУ им. Аль-Фараби, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, dmk57@mail.ru, 3935191;

Джумабаев Дулат - Институт математики и математического моделирования профессор Институт математики и математического моделирования, dzhumabaev@list.ru;

Атахан Нилупар - КазНУ им. Аль-Фараби, Докторант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, PhD докторант 6D060100 Математика, ata Khan-nilupar@mail.ru, 87011063050, КазНУ им.аль-Фараби, мех.-мат., 305 каб.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 27 – 38

UDC 536.46:532.517.4

**A.S. Askarova, S.A. Bolegenova,
S.A. Bolegenova, V.Yu. Maximov, Sh.S. Ospanova**

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty
Bolegenova.symbat@kaznu.kz

**INVESTIGATION OF AERODYNAMICS AND HEAT
AND MASS TRANSFER IN THE COMBUSTION CHAMBERS
OF THE BOILERS PK-39 AND BKZ-160**

Annotation. Scientific researches in the field of development of new and improvement of existing technologies to improve the combustion of low grade fuels that reduce emissions of pollutants and at the same time improve the main indicators of energy complexes represent considerable interest for thermal power industry in the Republic of Kazakhstan. The development of such methods and improving coal combustion processes, along with alternative ways of organizing its combustion process (plasma thermochemical preparation, with the use of technology overfire air and the technology mechanism of selective and non-catalytic reduction of nitrogen oxide emissions) is currently the most urgent for the entire energy complex.

Keywords: combustion, combustion chamber, plasma-fuel systems, numerical modeling.

Many experimental and analytical studies are carried out under simplified conditions, which differ from the real heating conditions of the process flow. For example, many of them are carried out under the conditions of combustion of large particles when they are incinerated in a medium with large excess of air. Some researchers have assumed that the temperature of the medium does not change during combustion, and combustion takes place in one of the limiting regimes: kinetic or diffuse. This simplification of the combustion process distorts its essence and does not allow us to clarify the aerodynamics and heat exchange occurring in a real combustion chamber [1].

When the solid fuel burns in a pulverized state, turbulent heat transfer processes, masses of reacting components and their interaction products take place in the combustion chamber. Such processes are described by equations based on the laws of conservation of mass and momentum. For reactive flows, in which heat transfer processes and chemical reactions occur, it is necessary to further solve the energy conservation equation and add the equation of conservation of the mixture components or the conservation equation for the mixture fractions and their variations. Turbulence is described by transport equations for turbulent characteristics [2-5].

This system of basic equations of the mathematical model used in the present work to describe the processes of turbulent heat and mass transfer during the combustion of solid fuel in the pulverized state (pulverized-coal torch), is as follows [2]:

The equation of continuity or the law of conservation of mass in a differential form is written in the form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (1)$$

where the first term describes the flow nonstationarity, the second term represents convective transfer.

Law of conservation of momentum:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{i,j}) - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (2)$$

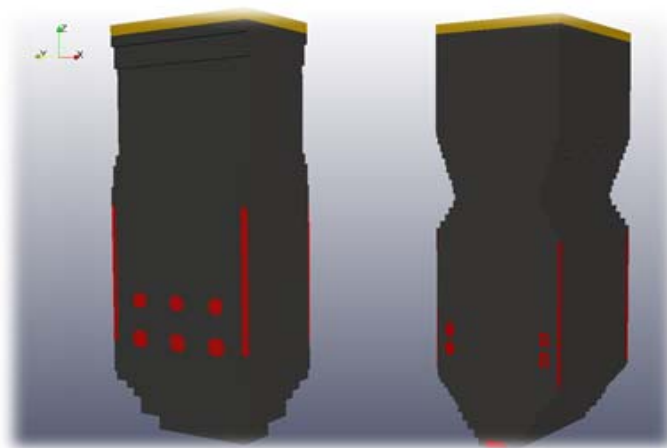
where f_i - mass force; $\tau_{i,j}$ - stress tensor.

Energy equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h) - \frac{\partial q_i^{res}}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial t} + u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + S_h \quad (3)$$

Plasma thermochemical preparation of coal for combustion consists in heating by a plasma torch with an oxygen deficit of the flow of the pulverized coal mixture in a special chamber to the temperature higher than the autoignition temperature of this coal. In this case, there is an almost complete release of volatile substances and partial combustion and gasification of coal carbon. As a result, the obtained fuel mixture or the highly reactive two-component fuel, consisting of combustible gas and coke residue, is ignited when mixed with secondary air and steadily burns without the use of a reserve high-reaction fuel (fuel oil or natural gas) to stabilize the pulverized-coal flare even in a cold furnace. The use of different types of burners does not cause differences in the mechanism of plasma thermochemical preparation of coal for combustion. The use of PTS makes it possible to exclude fuel oil from the fuel balance of CHP, traditionally used to kindle boilers [6-8].

The process of plasma thermochemical preparation of fuel for combustion is carried out in PTS. The plasma torch is installed on the lined channel of the air mixture of the burner, which is converted into PTS and installed directly into the combustion chamber [7-8]. Figure 1 presents a general view of the furnace chambers of the PK-39 boilers of the Aksuiskaya SDPP and BKZ-160 of Almaty CHP-3 equipped with plasma-fuel systems.



a) PK-39 of the Aksuiskaya SDPP; b) BKZ-160 of Almaty CHP-3

Figure 1 - General view of furnace chambers of boilers equipped with plasmatrone

Figures 2 and 3 show the field of the full-velocity vector in the combustion chamber in the cross section of the burners for each of the investigated cases, for the boilers PK-39 and BKZ-160.

Analysis of figure 2 shows that with increasing number of thermochemically activated flows (4, 6, 12 plasma torches), the core of the flame is shifted to the center of symmetry of the combustion chamber. At the point of collision of opposing flows, the dynamic head is transformed into static pressure as a result of braking. Under the action of the resulting pressure drop, the total flow spreads up and down with increased velocities. When impact opposite torches and the turbulence of the streams, mass and heat transfer is accelerated to a large extent, while the mixture-forming and heating amplification intensify the combustion process.

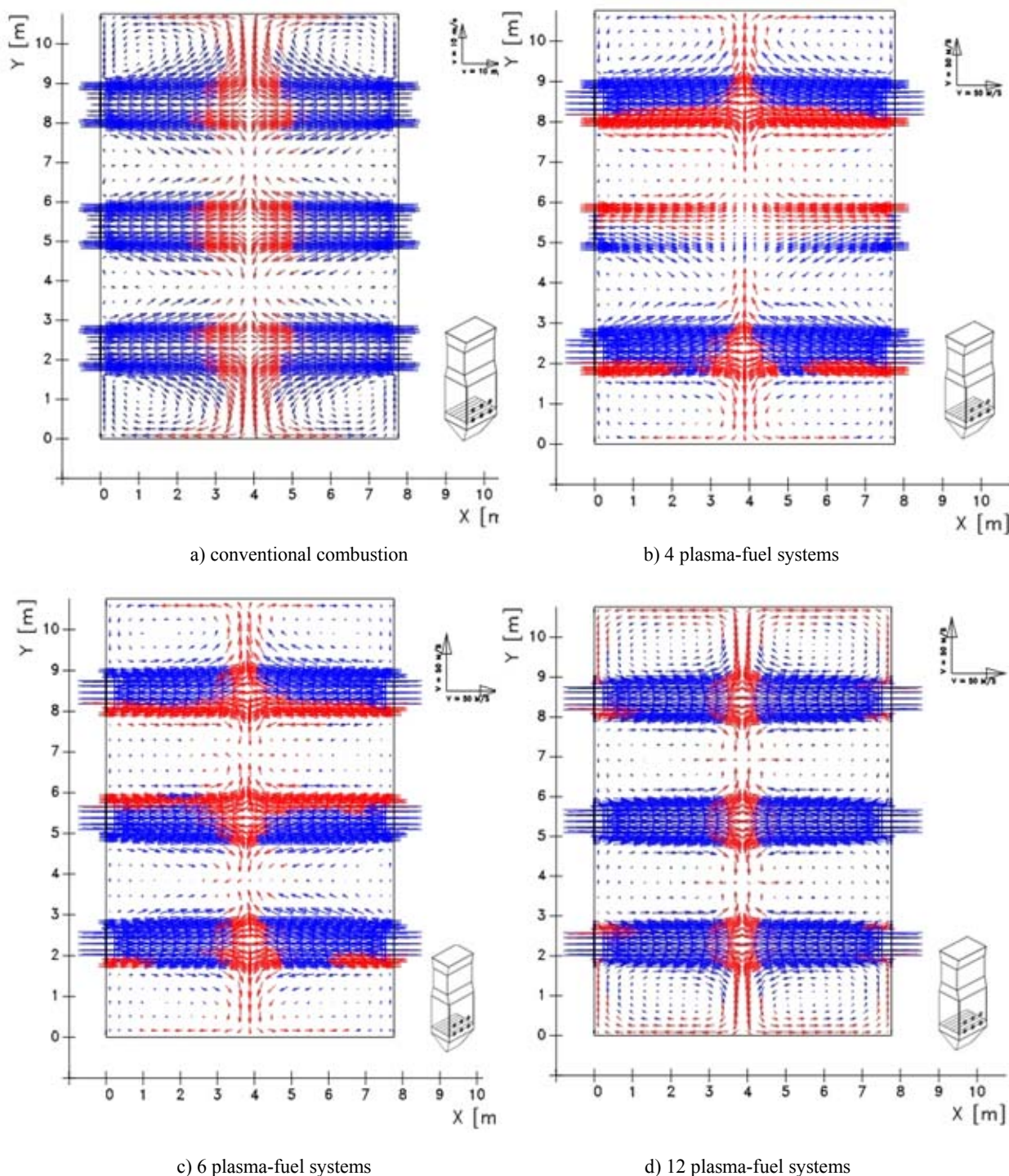


Figure 2 - The field of the full-velocity vector in the section of burners of the combustion chamber of the boiler PK-39 of Aksuyskaya SDPP

Figure 3 indicates a significant difference between the two investigated cases. In Fig. 3b, the pulverized coal streams, flowing into the furnace through conventional burners and through plasma-fuel systems, are clearly visible. Thus, in the furnace chamber, the flows of the two-component high-reaction fuel gasified by plasma activation are propagated in accordance with the laws of aerodynamics and are the thermal source for the air mixture delivered through burners not equipped with plasma ignition systems.

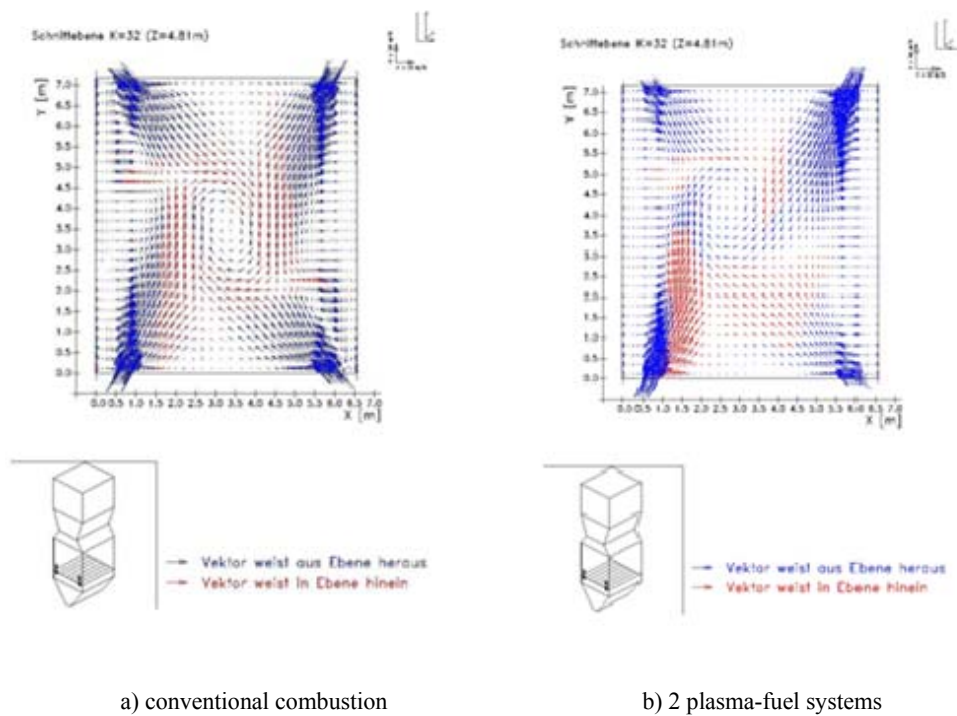
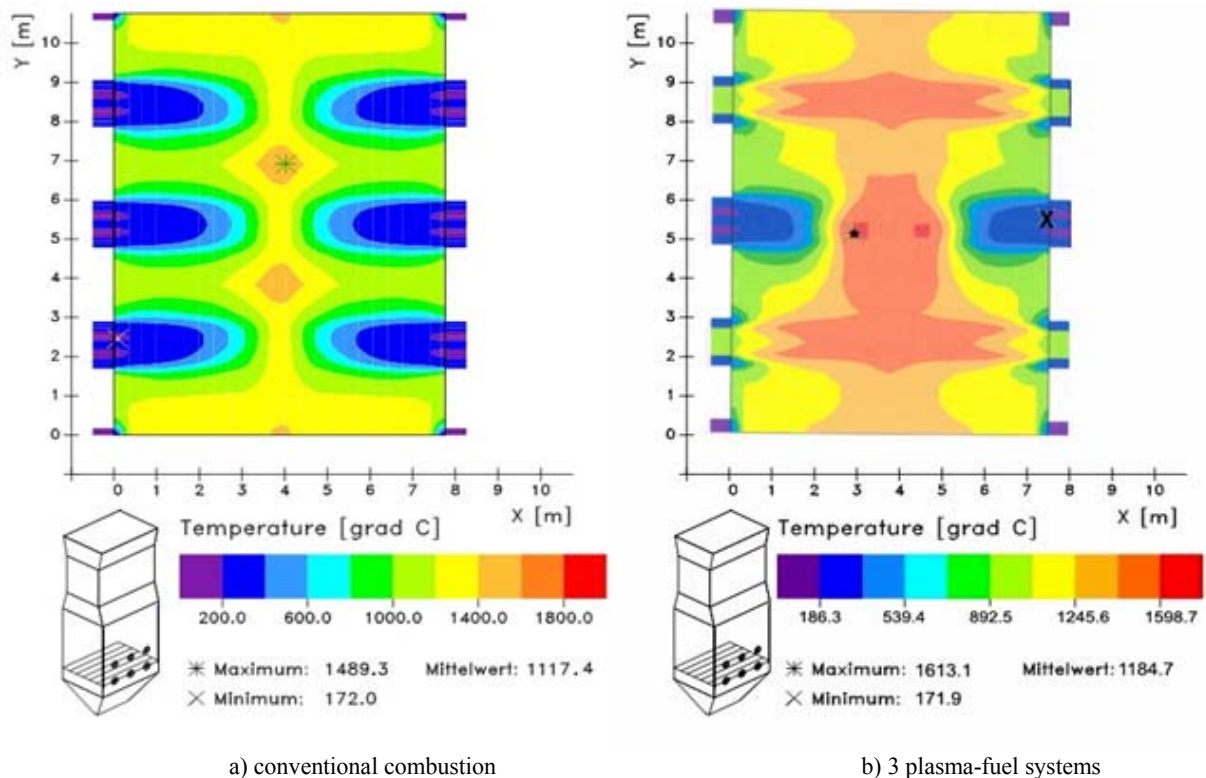


Figure 3 - Distribution of the full-velocity vector in the location of the burners of the combustion chamber of the boiler BKZ-160 of Almaty CHP-3

It can be noted (Fig. 4) that, compared with the conventional pulverized coal flow, the average temperature in the plane of the burner cross-section for the PK-39 boiler increases with the number of thermochemically activated streams and amounts to: 1117 °C - without activation; 4 activated streams - 1185 °C; 6 - 1211 °C; 12 - 1488 °C.



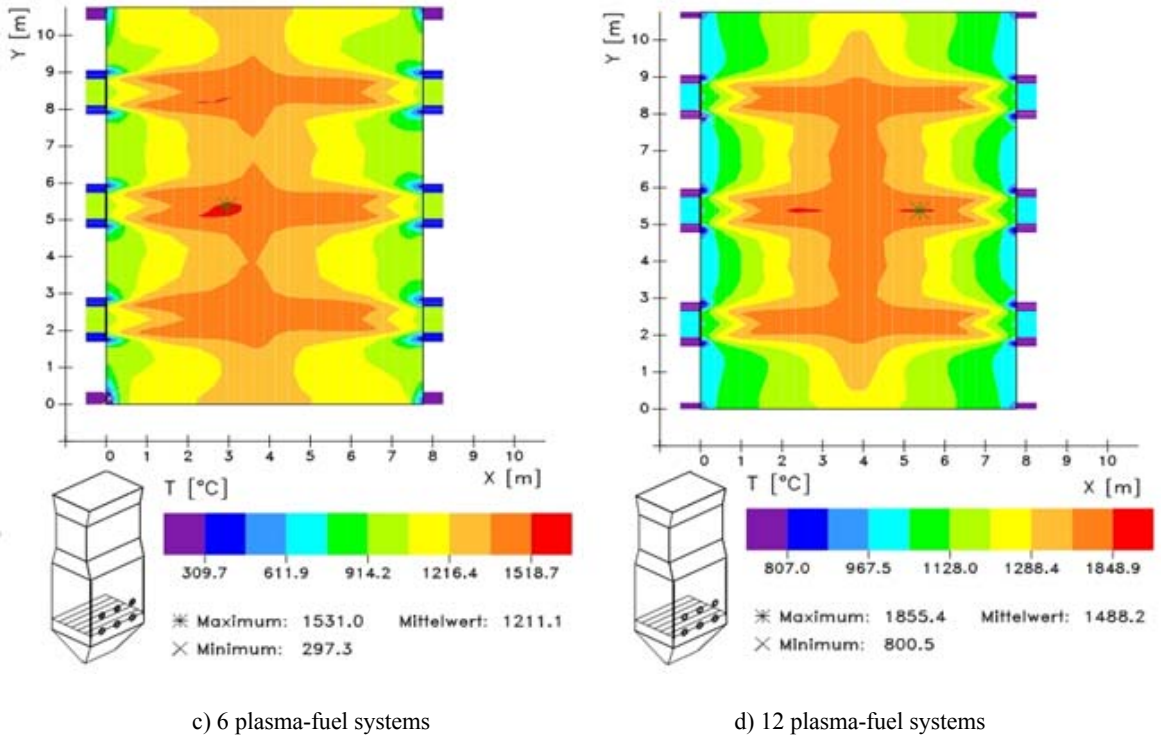


Figure 4 - Temperature field in the plane of the burner section of the lower stage of the furnace chamber of PK-39 boiler of Aksuiskaya SDPP

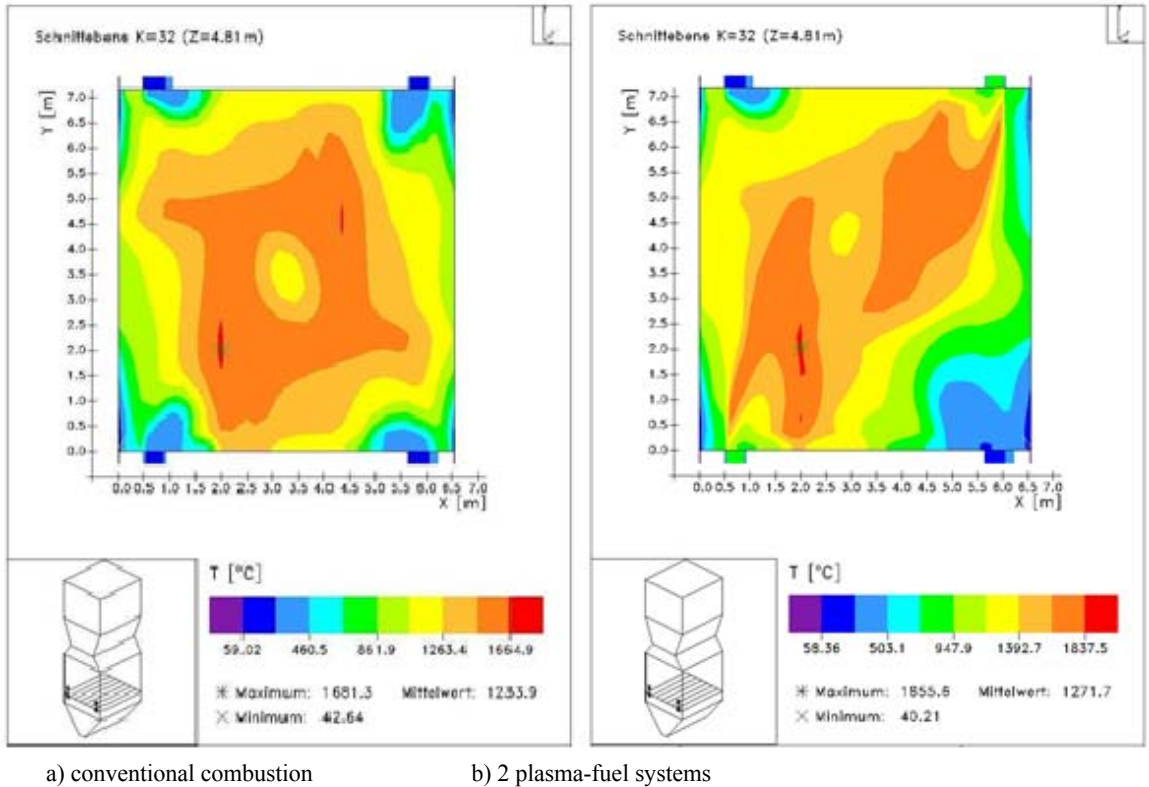


Figure 5 - Temperature distribution in the area of the burner devices arrangement in the lower stage of the furnace chamber of the BKZ-160 boiler of Almaty CHP -3

Analysis of figure 5 shows that, in comparison with the use of conventional pulverized coal flow, the average temperature in the plane of the section of burners with thermochemically activated flows increases and amounts to: 1234 °C - without activation, and 1272 °C - for two activated flows in the lower stage of the burners.

On the basis of the foregoing, it can be concluded that for all boilers under study the process of plasma activation of the combustion of the air mixture leads to an increase in the temperature in the area of installation of burners. At the same time, with an increase in the number of installed plasma-fuel systems, the combustion front is shifted to the location of plasma activation systems of coal flows.

This can be explained, first of all, by the fact that during the plasma activation of the pulverized coal stream, volatile substances are released before entering the combustion chamber, carbon is oxidized, which leads to partial gasification of the fuel. The released volatile and gasification products begin to react with the oxygen present in the primary air, in turn, further releasing heat and further heating the reacting stream of pulverized coal particles, the products of combustion of volatile and gasification of the coke residue (carbon).

REFERENCES

- [1] Müller H. Numerical calculation of three-dimensional turbulent flows in steam generators with heat transfer and chemical reactions using the example of the SNCR method. *Progress reports VDI-Verlag*. 1992. 268. 158 p. (in Ger.).
- [2] Leithner R., Müller H. CFD studies for boilers. *Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. Cambridge, 2003, 172-185 (in Eng).
- [3] Leithner R. Energy conversion processes with intrinsic CO₂ separation. *Transactions of the Society for Mining, Metallurgy and Exploration*, 2005, 18, 135-145 (in Eng).
- [4] Leithner R. Numerical Simulation. *Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture*. Braunschweig, 2006. 52 p. (in Eng).
- [5] Askarova A.S., Messerle V.E., Ustimenko A.B., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu. Numerical simulation of pulverized coal combustion in a power boiler furnace. *Journal of High Temperature*. 2015. 53. 3. 467-474.
- [6] Askarova A., Bolegenova S., Maximov V., Beketayeva M., Safarik P. Numerical modeling of pulverized coal combustion at thermal power plant boilers. *Journal of Thermal Science*. 2015. 24(3). 275-282 (in Eng).
- [7] Askarova A., Messerle V., Bolegenova S., Ustimenko A. Simulation of Coal Plasma Ignition and Combustion in a Furnace Chamber. *The 31st European Physical Society Conference on Plasma Physics Imperial College*. London: UK, 2004. 251-264 (in Eng).
- [8] Askarova A., Messerle V., Karpenko V., Ustimenko A. Plasma-chemical activation of the combustion of solid fuels. *High Energy Chemistry*. 2006.40. 141-148.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 33 – 38

УДК 536.46:532.517.4

**А.С. Аскарова, С.А. Болегенова,
С.А. Болегенова, В.Ю. Максимов, Ш.С. Оспанова**Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы
Bolegenova.symbat@kaznu.kz**ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ И ТЕПЛОМАССОБМЕНА
В ТОПОЧНЫХ КАМЕРАХ КОТЛОВ ПК-39 И БКЗ-160**

Аннотация. Научные исследования в области разработки новых и совершенствования существующих технологий по улучшению горения низкосортных топлив, которые обеспечивают снижение выбросов в атмосферу загрязняющих веществ и одновременно улучшают основные показатели энергетических комплексов, представляют значительный интерес для теплоэнергетической отрасли Республики Казахстан. Разработка таких методов и совершенствование процессов горения угля наряду с использованием альтернативных способов организации процесса его сжигания (плазменная термохимическая подготовка, с применением технологии острого дутья и технологии использования механизма селективного и некаталитического снижения выбросов оксидов азота) является в настоящее время наиболее актуальным для всего энергетического комплекса.

Ключевые слова: Горение, топочная камера, плазменно-топливные системы, численное моделирование.

Многие экспериментальные и аналитические исследования проводятся в упрощенных условиях, которые отличаются от реальных топочных условий протекания процесса. Так, например, многие из них проводятся в условиях горения крупных частиц при их сжигании в среде с большими избытками воздуха. Некоторые исследователи принимали, что температура среды в процессе горения не изменится, а горение протекает в одном из предельных режимов: кинетическом или диффузном. Такое упрощение процесса горения искажает его суть и не позволяет выяснить аэродинамику и теплообмен, происходящие в реальной топочной камере [1].

При сгорании твердого топлива в пылевидном состоянии в топочной камере происходят турбулентные процессы переноса тепла, массы реагирующих компонентов и продуктов их взаимодействия. Такие процессы описываются уравнениями, основанными на законах сохранения массы и импульса. Для реагирующих потоков, в которых происходят процессы теплопередачи и химические реакции необходимо дополнительно решать уравнение сохранения энергии и добавлять уравнение сохранения компонентов смеси или уравнения сохранения для фракций смеси и их изменений. Турбулентность описывается транспортными уравнениями для турбулентных характеристик [2-5].

Указанная система основных уравнений математической модели, используемой в настоящей работе для описания процессов турбулентного теплопереноса при сжигании твердого топлива в пылевидном состоянии (пылеугольный факел) выглядит следующим образом [2]:

Уравнение неразрывности или закон сохранения массы в дифференциальной форме записывается в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (1)$$

где первый член описывает нестационарность потока, второй член представляет собой конвективный перенос.

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{i,j}) - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (2)$$

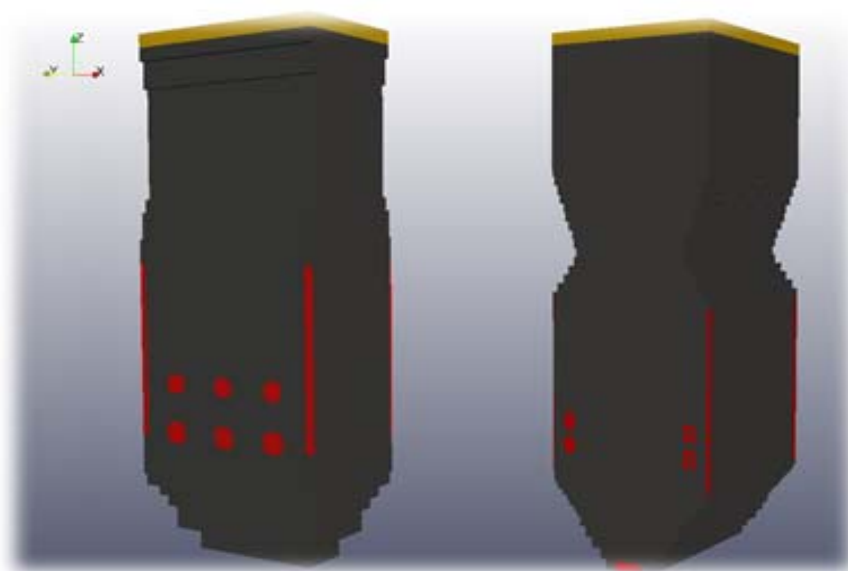
где f_i - объемные силы; $\tau_{i,j}$ - тензор напряжений.

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h) - \frac{\partial q_i^{res}}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial t} + u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + S_h \quad (3)$$

Плазменная термохимическая подготовка угля к сжиганию заключается в нагреве плазменным факелом при дефиците кислорода потока пылеугольной смеси в специальной камере до температуры, превышающей температуру самовоспламенения данного угля. При этом происходит практически полный выход летучих веществ и частичное сгорание и газификация углерода угля. В результате полученная топливная смесь или высокорреакционное двухкомпонентное топливо, состоящее из горючего газа и коксового остатка, воспламеняется при смешении с вторичным воздухом и устойчиво горит без использования для стабилизации пылеугольного факела даже в холодной топке резервного высокорреакционного топлива (мазута или природного газа). Использование различных типов горелок не вызывает отличий в механизме процесса плазменной термохимической подготовки угля к сжиганию. Применение ПТС позволяет исключить из топливного баланса ТЭС мазут, традиционно используемый для растопки котлов [6-8].

Процесс плазменной термохимической подготовки топлива к сжиганию осуществляется в ПТС. Плазмотрон устанавливается на футерованный канал аэросмеси горелки, которая тем самым преобразуется в ПТС и устанавливается непосредственно в топочную камеру [7-8]. На рисунке 1 представлен общий вид топочных камер котлов ПК-39 Аксуйской ГРЭС и БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3, оборудованных плазменно-топливными системами.



а) ПК-39 Аксуйской ГРЭС; б) БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3

Рисунок 1 - Общий вид топочных камер котлов, оборудованных плазмотронами

На рисунках 2 – 3 представлено поле вектора полной скорости в камере сгорания в сечении горелок для каждого из исследуемых случаев, для котлов ПК-39 и БКЗ-160.

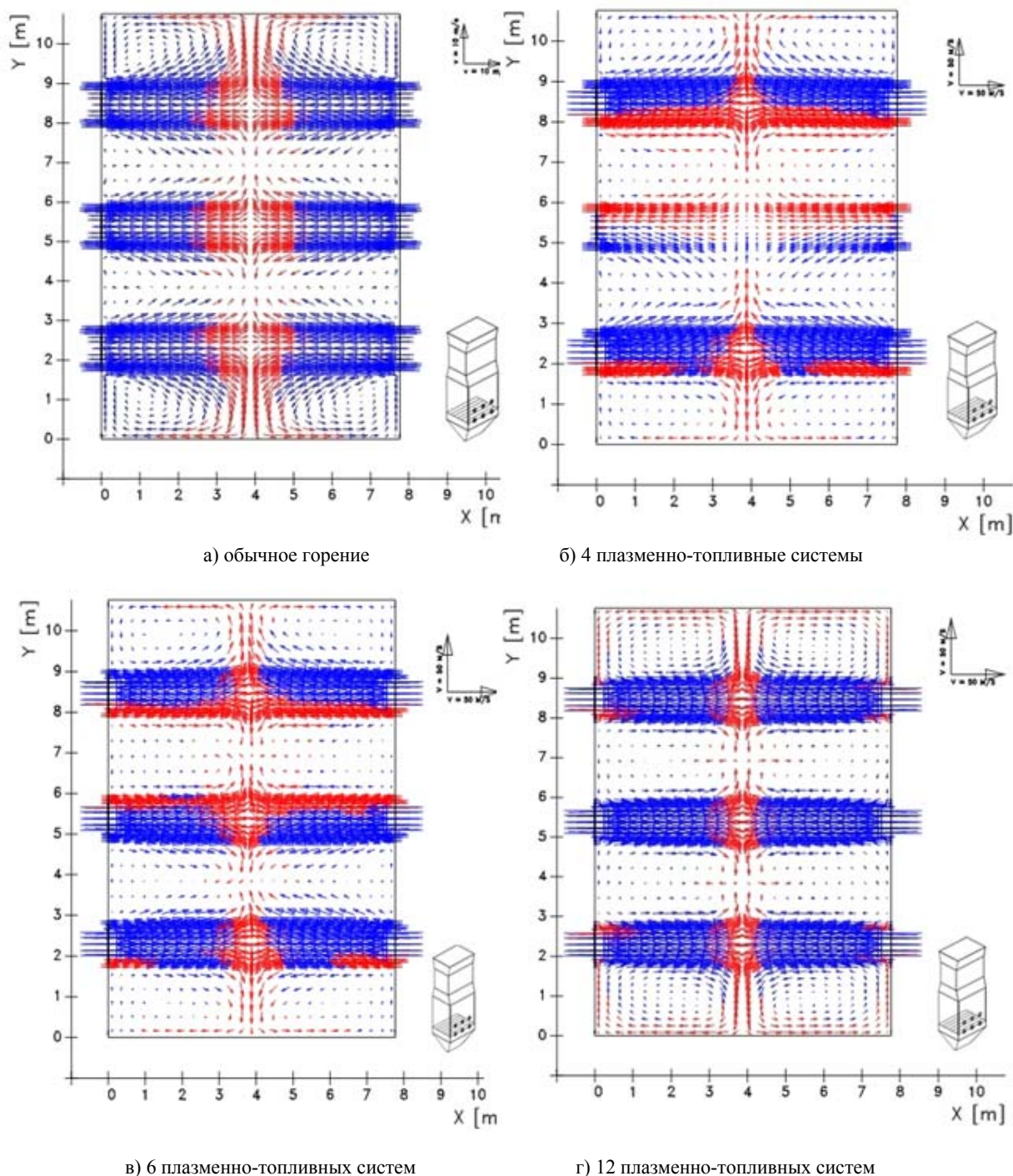


Рисунок 2 – Поле вектора полной скорости в сечении горелок топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС

Анализ рисунка 2 показывает, что с увеличением числа термохимически активированных потоков (4, 6, 12 плазменных горелок) ядро факела смещается к центру симметрии топочной камеры. В месте соударения встречных потоков в результате торможения динамический напор трансформируется в статическое давление. Под действием образовавшегося перепада давления общий поток растекается вверх и вниз с повышенными скоростями. При соударении встречных факелов и турбулизации потоков в значительной степени ускоряется массо- и теплообмен, а усиливающееся при этом смесеобразование и нагрев интенсифицируют процесс горения.

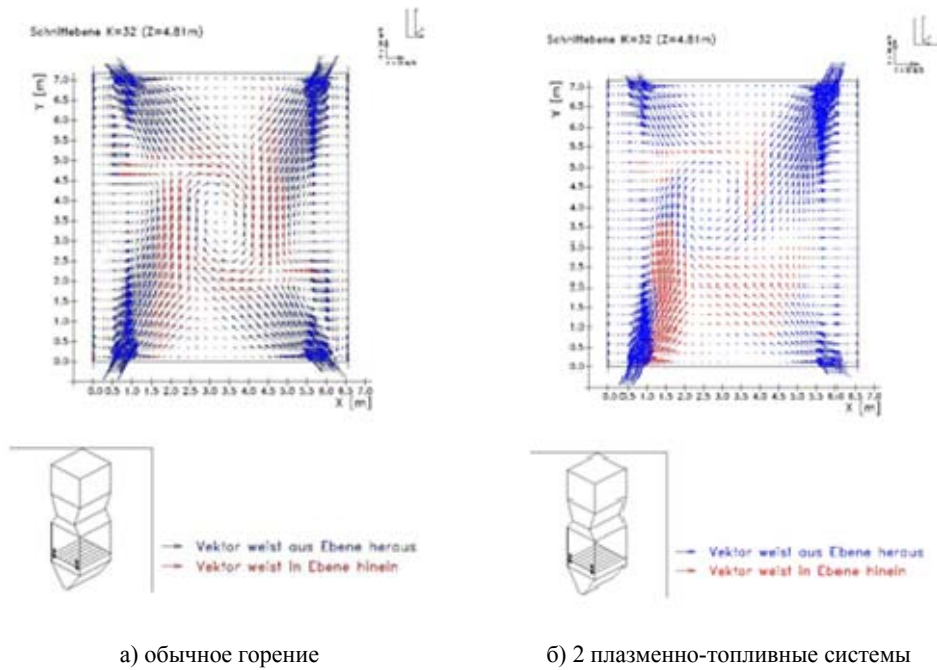
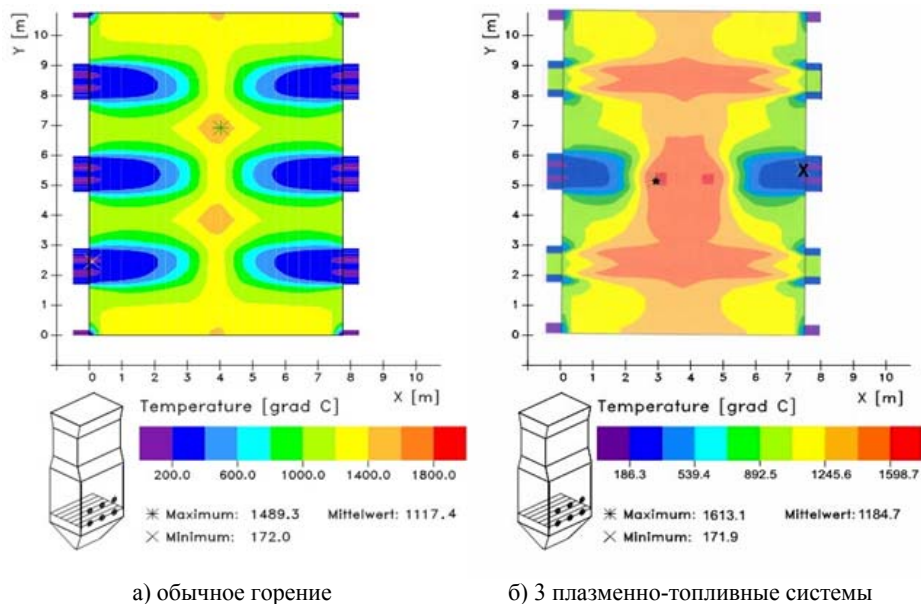


Рисунок 3 - Распределение вектора полной скорости в области расположения горелок топочной камеры котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3

Рисунок 3 указывает на существенное различие между двумя исследуемыми случаями. На рисунке 3, б отчетливо видны потоки пылеугольной смеси, поступающие в топку через обычные горелки и через плазменно-топливные системы. Таким образом, в объеме топочной камеры потоки двухкомпонентного высокорекреационного топлива, газифицированные с помощью плазменной активации, распространяются в соответствии с законами аэродинамики и являются тепловым источником для аэросмеси, подаваемой через горелки, не оснащенные системами плазменного воспламенения.

Можно заметить (рисунок 4), что по сравнению с использованием обычного пылеугольного потока среднее значение температуры в плоскости сечения горелок для котла ПК-39 с увеличением числа термохимически активированных потоков увеличивается и составляет: без активации – 1117 °С; четыре активированных потока - 1185 °С; 6 – 1211 °С; 12 – 1488 °С.



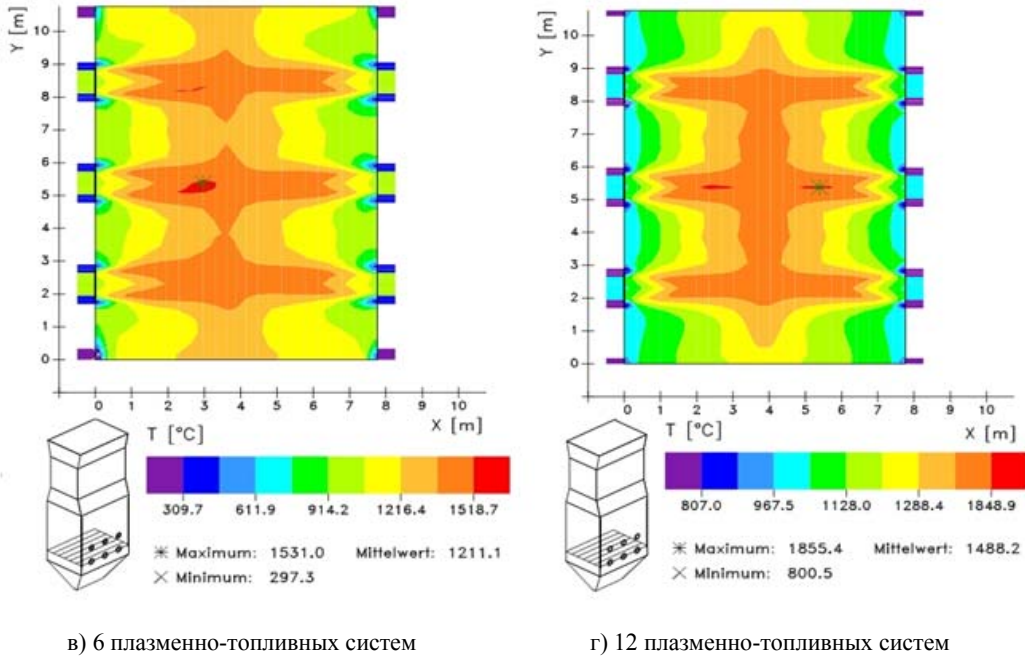


Рисунок 4 - Поле температуры в плоскости сечения горелок нижнего яруса топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС

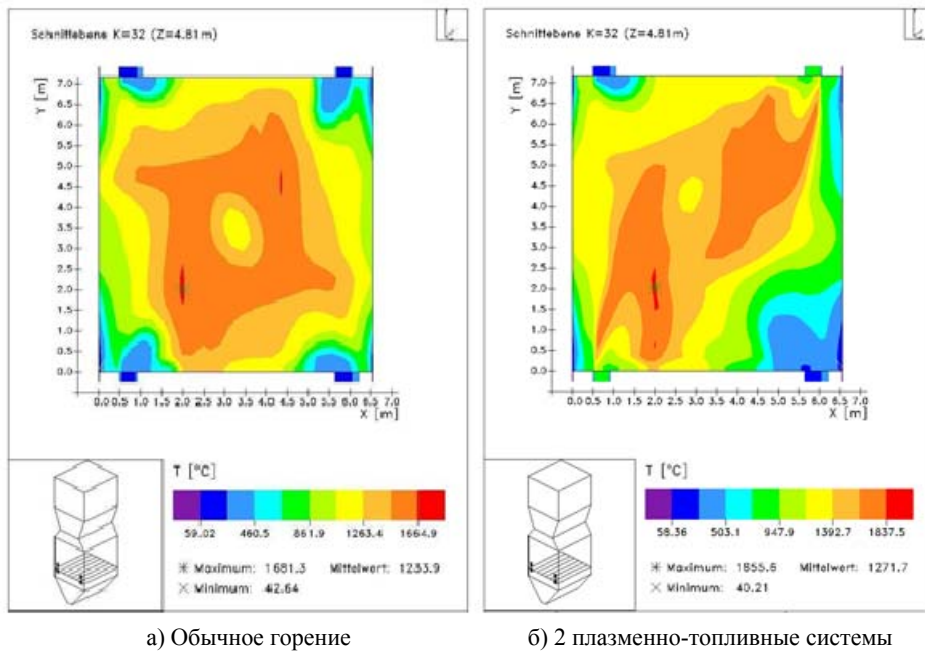


Рисунок 5 – Распределение температуры в области расположения горелочных устройств нижнего яруса топочной камеры котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ-3

Анализ рисунка 5 показывает, что по сравнению с использованием обычного пылеугольного потока среднее значение температуры в плоскости сечения горелок с термохимически активированными потоками увеличивается и составляет: без активации – 1234 °C, а при двух активированных потоках в области нижнего яруса горелок - 1272 °C.

На основании вышесказанного, можно сделать вывод о том, что для всех исследуемых котлов процесс плазменной активации горения аэросмеси приводит к увеличению температуры в области установки горелочных устройств. При этом с увеличением числа установленных плазменно-

топливных систем наблюдается смещение фронта горения к месту расположения систем плазменной активации угольных потоков.

Это можно объяснить, прежде всего, тем, что при плазменной активации пылеугольного потока до выхода в топочное пространство выделяются летучие вещества, окисляется углерод, что и приводит к частичной газификации топлива. Выделившиеся летучие и продукты газификации начинают реагировать с присутствующим в первичном воздухе кислородом, в свою очередь, дополнительно выделяя тепло и еще больше нагревая реагирующий поток пылеугольных частиц, продуктов сгорания летучих и газификации коксового остатка (углерода).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Müller H. Numerische Berechnung dreidimensionaler turbulenter Strömungen in Dampferzeugern mit Wärmeübergang und chemischen Reactionen am Beispiel des SNCR-Verfahrens // Fortschritt-Berichte VDI-Verlag. - № 268,1992. - 158 p.
- [2] Leithner R., Müller H. CFD studies for boilers // Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. - Cambridge, 2003. - P.172-185.
- [3] Leithner R. Energy conversion processes with intrinsic CO₂ separation // Transactions of the Society for Mining, Metallurgy and Exploration. - Vol.18, 2005. - P. 135-145.
- [4] Leithner R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. Braunschweig, 2006. 52 p.
- [5] Аскарова А.С., Мессерле В.Е., Устименко А.Б., Болегенова С.А., Максимов В.Ю. Численное моделирование горения пылеугольного топлива в камере сгорания энергетического котла // Журнал «Химия высоких энергий» - переводной Journal of High Temperature. – Т.53, №3, 2015. – С.467-474.
- [6] Askarova A., Bolegenova S., Maximov V., Beketayeva M., Safarik P. Numerical modeling of pulverized coal combustion at thermal power plant boilers // Journal of Thermal Science. – Vol.24. – Issue 3, 2015. – P.275-282.
- [7] Askarova A., Messerle V., Bolegenova S., Ustimenko A. Simulation of Coal Plasma Ignition and Combustion in a Furnace Chamber // The 31st European Physical Society Conference on Plasma Physics Imperial College. – London: UK, 2004. – P.251-264.
- [8] Аскарова А., Мессерле В., Карпенко В., Устименко А. Плазмохимическая активация горения твердых топлив // Химия высоких энергий. – 2006. – Т.40. – С.141-148.

Ә.С. Асқарова, С.Ә. Болегенова, С.Ә. Болегенова, В.Ю. Максимов, Ш.С. Оспанова

Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы

ПК-39 ЖӘНЕ БК3-160 ҚАЗАНДЫҚТАРЫНЫҢ ЖАНУ КАМЕРАЛАРЫНЫҢ АЭРОДИНАМИКАСЫ МЕН ЖЫЛУ МАССА АЛМАСУЫН ЗЕРТТЕУ

Аннотация. Атмосфераға бөлінетін зиянды қалдықтардың мөлшерін кемітетін және энергетикалық кешендердің негізгі көрсеткіштерін бірмезгілде жоғарылататын төменгі сұрыпты отындардың жануын жақсартуға қатысты жаңа технологияларды жасау және ағымдағы түрлерін жетілдіру облысындағы ғылыми зерттеулер Қазақстан Республикасының жылуэнергетика саласы үшін айтарлықтай қызығушылық тудырып отыр. Осындай әдістерді жобалау және жану процесін ұйымдастырудың балама түрлерін қолдана отырып, көмірді жағу процесін жетілдіру (өткір үрлеу технологиясы мен азот тотықтарының қалдықтарын селективті каталикалық емес кеміту механизмі технологиясын қолдана отырып, плазмалық термохимиялық әзірлеу) қазіргі уақытта барша энергетикалық кешен үшін өзекті болып отыр.

Тірек сөздер: Жану, жану камерасы, плазма-отын жүйелері, сандық модельдеу.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 39 – 53

UDC 530.12:531.51

M.E. Abishev, S. Toktarbay, A.Zh. Abylayeva, A.Z. Talkhat, F.B. Belissarova

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty
medeu.abishev@kaznu.kz, saken.yan@yandex.com

THE ORBITAL STABILITY OF THE MOTION OF A TEST PARTICLE IN A FIELD OF TWO MASSIVE ROTATING BODIES

Annotation. The paper considers the orbital stability of the circular motion of a test body in the restricted three-body problem, where all bodies have their own rotation. The position of the central body coincides with the reference point of coordinates, the second body is moving in circular orbit around a central body (first body), and without disturbance. The test body moves in a perturbed circular orbit. This task belongs to the class of quasi-Keplerian problem and based on the adiabatic theory of motion of bodies in the General relativity (GR) mechanics. The adiabatic theory of motion of bodies is the approach for study the evolutionary motion of bodies in the mechanics of the GR and developed by M.M. Abdildin. The corresponding theory based on the vector elements to describe the motion in the asymptotic methods of nonlinear oscillations and in the method of adiabatic invariants.

We derived the Lagrangian of a system up to the terms of second order. This accuracy is sufficient for the problems of relativistic celestial mechanics, the influence of the internal structure of bodies can be neglected and omitted all the members which associated with that influence. We are limited to zero terms of the expansion in powers of the relationship of body size to their mutual distances.

Key words: General relativity, rotational motion, translational motion, stability of motion, three-body problem.

Introduction

The main task of celestial mechanics is the problem of the motion of a system of bodies, special cases of which are the tasks of two, three, four, etc. bodies, to which the problems of the motion of various concrete celestial bodies are indicated [1, 2].

The classical method of investigating the motion of celestial bodies involves representation of the solution of the corresponding equations of perturbed motion in the form of segments of series. However, Henri Poincaré showed that the series, used to describe the motion of celestial bodies, diverge. Consequently, they can not be used to analyze the behavior of the solar system on an infinite time interval [3]. According to the KAM-theory, if the masses of the planets are small enough, the eccentricities and slopes of the orbits are small, then for the majority of the initial conditions (excluding the resonant and close to them) the motion will be conditionally periodic, the eccentricities and slopes will remain small, and the major semiaxes will always oscillate near their original values, that is, the Solar system will be Lyapunov-stable over an infinite time interval. Unfortunately, resonances play a very important role in the real Solar system. Therefore, the conclusions of KAM-theory can not be applied to the Solar system as a whole over the entire range of its existence [4].

Currently, the stability of the Solar system is mainly considered within the framework of classical mechanics, although the modern theory describing the motion and interaction of the Solar system is the general relativity theory (GRT). Therefore, the study of the problem of the stability of motion in the framework of GRT is very relevant.

Qualitative and approximate methods of studying the motion of bodies in general relativity play an extremely important role, since even to obtain the most exact equations of motion (except for test bodies - the equation of geodesics) is practically impossible to achieve.

A rigorous and correct statement of the problem of the stability of the motion of bodies in GRT is more complicated than in classical mechanics. This is due to the complexity of the GRT mathematical

apparatus and, as a result, the impossibility of obtaining important physical corollaries of the theory with the help of exact solutions of basic and other equations of general relativity.

It should also be noted that in classical mechanics, the exact differential equations describing the class of motions under study are usually known. In GRT, as mentioned above, the exact equations of motion are known only for test bodies. In the case of bodies of comparable masses, the strict formulation of the problem of motion stability is still clear, since in this case the exact equations of motion are unknown. They are inferred only in a certain approximation. Moreover, most of the problems considered in the GRT mechanics are quasi-Keplerian because of the smallness of the relativistic perturbations in comparison with the Newtonian force. This circumstance makes it possible to search for special, optimal, simple methods for studying problems and other questions of the problem of the motion of bodies in general relativity [5-8].

In works [9-12], the orbital stability of the circular motion of a test body in a restricted three-body problem in GRT is investigated, when all bodies have no proper rotation. Perturbations from a second body moving in a circular orbit in the motion area of the test body (in the plane of the second body motion) are of the order of relativistic corrections to the motion of the test body from the central body

$$U_1 \ll c^2, U_2 \ll U_1 \quad (1)$$

where U_1, U_2 – potentials of the central and second body, respectively. The position of the resting central body coincides with the reference point of coordinates, the second body moves around the central (first) body in a circle and is not subjected to disturbance. The test body moves along a perturbed circular orbit. The problem belongs to the class of quasi-Keplerian ones and is considered on the basis of the adiabatic theory of the motion of bodies in the GRT mechanics. Under the name of adiabatic theory of motion of bodies it is meant the approach developed by M.M. Abdildin for the study of evolutionary motion in the GRT mechanics. It is based on the use of vector elements for the description of motion, on the asymptotic methods of the theory of nonlinear oscillations, and on the method of adiabatic invariants [13-19]. As a result, [9] it is shown that the motion of the test body in the plane of the orbit of the second body is stable.

Methods of research

In this paper, we consider the orbital stability problem for the circular motion of the test body in a restricted three-body problem, when all bodies have their own rotation. We derived the Lagrangian functions of a system of bodies to within second-order terms. With accuracy that is completely sufficient for the problems of relativistic celestial mechanics, the influence of the internal structure of bodies can generally be neglected and omitted from all terms associated with taking this influence into account. We confine ourselves to the zero terms of the expansion in powers of the ratio of the sizes of the bodies to their mutual distances.

The Lagrange function of translational and rotational motion for three rotating bodies can be represented as:

$$L = L^{(0)} + L^{(*)} \quad (2)$$

where $L^{(0)}$ – the Lagrange function for three point masses, and the second term $L^{(*)}$ is responsible for corrections containing rotational terms.

The Hamiltonian of the problem can be represented as

$$H = H^{(0)} + H^{(*)} \quad (3)$$

where $H^{(0)}$ – the Hamiltonian for three point masses, and the second term $H^{(*)}$ is responsible for corrections containing rotational terms.

We write down the equations of motion of the problem under consideration in the representation of the vector elements \vec{M} and \vec{A} , which is convenient for the application of asymptotic methods of nonlinear mechanics, since, in this case, the separation of the variables into fast and slow ones is evident in the equations of motion. The latter circumstance is precisely the characteristic feature of those problems for the analysis of which the asymptotic methods of investigation are applied.

\vec{M} and \vec{A} – the vector elements of the orbit (angular momentum and the Laplace vector) and are equal to:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (4)$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M} \right] - \gamma \frac{mm_0}{r} \vec{r}, \quad (5)$$

where

$$A = \gamma mm_0 e = \alpha e,$$

where e – eccentricity of orbit.

So, following the procedure, we get the derivatives

$$\dot{M}_i = \left[\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i \right], \quad (6)$$

where

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial H^*}{\partial p_i} = \dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \dot{\vec{r}}_i^{(*)}; \quad \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial H_0}{\partial r_i} - \frac{\partial H^*}{\partial r_i} = \dot{\vec{p}}_i^{(0)} + \dot{\vec{p}}_i^{(*)}; \quad (7)$$

We can also write the equation (6) in the following form:

$$\dot{M} = \dot{M}^{(0)} + \dot{M}^{(*)} \quad (8)$$

where $\dot{M}^{(0)}$ – change in the moment for three point masses, and $\dot{M}^{(*)}$ - change in the moment due to body rotation.

To obtain the equation of evolutionary motion, it is necessary to integrate the equation (8) over the period of the repetition of the configurations of the system T (the synodic period of the test body):

$$\bar{M} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{M}^{(0)} + \bar{M}^{(*)} \right) dt. \quad (9)$$

where

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}. \quad (10)$$

The first component on the right-hand side of equation (9) describes the average change in the orbital angular momentum for three point masses. It was shown in [9] that this quantity is zero. Thus, in this case, the motion of the test body in the plane of the orbit is stable.

Let us now consider the case when all bodies have their own rotation. In equation (2) $L^{(*)}$, containing rotational terms, takes the form [20]

$$\begin{aligned} L^* = & \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 I_i + \frac{1}{c^2} \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 I_i - \frac{1}{2} \left(I_2 (\vec{\omega}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2)^2 + I_3 (\vec{\omega}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3)^2 \right) \right] \\ & - \frac{\gamma}{c^2} \cdot \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2) \cdot [3m_1 I_2 \cdot \omega_2 + 4m_2 I_1 \cdot \omega_1] - \frac{1}{|\vec{r}_3|^3} (\vec{r}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3) \cdot [3m_1 I_3 \cdot \omega_3 + 4m_3 I_1 \cdot \omega_1] + \right. \\ & \left. + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left[(3\dot{\vec{r}}_3 - 4\dot{\vec{r}}_2) \cdot m_2 I_3 \cdot \omega_3 - (3\dot{\vec{r}}_2 - 4\dot{\vec{r}}_3) \cdot m_3 I_2 \cdot \omega_2 \right] \right\} + \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[-\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_3 + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \dot{\vec{r}}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \dot{\vec{r}}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right] - \frac{3\gamma}{c^2} \left[\frac{1}{|\vec{r}_2|} \cdot (m_1 \omega_2^2 I_2 + m_2 \omega_1^2 I_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{|\vec{r}_3|} (m_1 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_1^2 I_1) + \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} (m_2 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_2^2 I_2) \right] + \\
 & + \frac{\gamma^2}{2c^2} \left\{ \frac{m_1 I_2 + m_2 I_1}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{m_1 I_3 + m_3 I_1}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 I_3 + m_3 I_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \right. \\
 & \left. + m_1 m_2 I_3 \cdot \frac{\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + m_2 m_3 I_1 \cdot \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3}{|\vec{r}_2|^3 \cdot |\vec{r}_3|^3} + m_1 m_3 I_2 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2|^3} \right\} - \\
 & - \frac{\gamma}{c^2} \left\{ 4 \left[\frac{I_1 I_2}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{I_1 I_3}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{I_2 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] - 3 \left[\frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2|^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] \right\}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

As for the Hamiltonian $H^{(*)}$, this quantity is determined by the relation:

$$H^* = \vec{v}_i \frac{\partial L^*}{\partial \vec{v}_i} - L^*; \tag{12}$$

Then we get the following expression:

$$\begin{aligned}
 H^{(*)} = & -(\vec{\omega}_1^2 I_1 + \vec{\omega}_2^2 I_2 + \vec{\omega}_3^2 I_3) - \frac{1}{c^2} \left[I_1 \vec{\omega}_1^2 + I_2 \vec{\omega}_2^2 + I_3 \vec{\omega}_3^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(I_1 (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{p}_1)^2 + I_2 (\vec{\omega}_2 \cdot \vec{p}_2)^2 - I_3 (\vec{\omega}_3 \cdot \vec{p}_3)^2 \right) \right] - \\
 & - \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left[-\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right] \\
 & + \frac{3\gamma}{c^2} \left[\frac{1}{|\vec{r}_2|} \cdot (m_1 \omega_2^2 I_2 + m_2 \omega_1^2 I_1) + \frac{1}{|\vec{r}_3|} (m_1 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_1^2 I_1) + \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} (m_2 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_2^2 I_2) \right] - \\
 & - \frac{\gamma^2}{2c^2} \left\{ \frac{m_1 I_2 + m_2 I_1}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{m_1 I_3 + m_3 I_1}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 I_3 + m_3 I_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \right. \\
 & \left. + m_1 m_2 I_3 \cdot \frac{\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + m_2 m_3 I_1 \cdot \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3}{|\vec{r}_2|^3 \cdot |\vec{r}_3|^3} + m_1 m_3 I_2 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2|^3} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{c^2} \left\{ 4 \left[\frac{I_1 I_2}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{I_1 I_3}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{I_2 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] - 3 \left[\frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2|^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

where I_i – moment of inertia, $\vec{\omega}_i$ – orbital angular velocity. Bearing in mind (7), the derivatives

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}_3^{(*)} &= \frac{1}{c^2} I_3 (\vec{\omega}_3 \cdot \vec{p}_3) \vec{\omega}_3 - \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left[-\vec{p}_2 + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{p}_2) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right]. \quad (14) \\
\dot{\vec{p}}_3^{(*)} &= \left\{ -\frac{3\gamma}{2c^2} (m_2 I_2 + m_3 I_3) \frac{\vec{p}_2 \vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \frac{15\gamma}{2c^2} \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} - \right. \\
& - \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (m_2 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_2^2 I_2) + \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_2 I_3 + m_3 I_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \\
& + \frac{\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{1}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\gamma^2}{2c^2} m_2 m_3 I_1 \frac{1}{|\vec{r}_2|^3 |\vec{r}_3|^3} + \\
& \left. - \frac{9((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} \right\} \vec{r}_2 + \left[\vec{r}_3, \left\{ -\frac{9\gamma}{2c^2} (m_2 I_2 + m_3 I_3) \frac{\vec{p}_2 \vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{15\gamma}{2c^2} \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} + \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_3|^3} (m_1 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_1^2 I_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (m_2 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_2^2 I_2) - \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_1 I_3 + m_3 I_1)}{|\vec{r}_3|^5} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_2 I_3 + m_3 I_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{1}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^5 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_2 m_3 I_1 \frac{(\vec{r}_2 \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2|^3 |\vec{r}_3|^5} + \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_3 I_2 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5 |\vec{r}_2|^3} + \frac{12\gamma}{c^2} \frac{I_1 I_3}{|\vec{r}_3|^5} + \frac{12\gamma}{c^2} \frac{I_2 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\gamma}{c^2} \frac{9((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3) \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} \right\} \vec{r}_3 \right] + \left[\vec{r}_3, \frac{\gamma}{c^2} \left\{ \frac{9(\vec{r}_3 \vec{\omega}_2) \cdot (\vec{r}_3 \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{r}_3 - \frac{3(\vec{r}_3 \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_1 + \frac{3(\vec{r}_3 \vec{\omega}_1)}{|\vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_2 + \frac{3((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_3 \right\} \right]. \quad (15)
\end{aligned}$$

Results of the research

Here we integrate the equation of the rotational motion of the test body, having its own rotation, in the field of rotating massive two bodies. We write down the change in the angular momentum of the rotational component of the equation (8):

$$\dot{M}^{(*)} = \left[\dot{\vec{r}}^{(*)}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}^{(*)} \right]. \quad (16)$$

Let us consider the case when the angular velocity $\vec{\omega}_i$ ($i = 2, 3$) of the rotating body is perpendicular to its orbital plane: i.e.:

$$\vec{\omega}_i = \vec{k} \vec{\omega}_z^{(i)} (i = 2, 3), \quad (17)$$

$$\vec{r}_i = \vec{i}x^{(i)} + \vec{j}y^{(i)}, \quad (i = 2, 3) \quad (18)$$

and

$$\vec{p}_i = \vec{i}p_x^{(i)} + \vec{j}p_y^{(i)}, \quad (i = 2, 3), \quad (19)$$

Then, taking into account (14) and (15), the equation for the required vector function takes the form:

$$\begin{aligned} \dot{M}^{(*)} = & -\frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left\{ \left[-\vec{p}_2, \vec{p}_3 \right] + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{p}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \left[(\vec{r}_2 - \vec{r}_3), \vec{p}_3 \right] \right\} + \\ & + \left\{ -\frac{3\gamma}{2c^2} (m_2 I_2 + m_3 I_3) \frac{\vec{p}_2 \vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \frac{15\gamma}{2c^2} \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} - \right. \\ & \left. - \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (m_2 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_2^2 I_2) + \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_2 I_3 + m_3 I_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \right. \\ & + \frac{\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{1}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\gamma^2}{2c^2} m_2 m_3 I_1 \frac{1}{|\vec{r}_2|^3 |\vec{r}_3|^3} + \\ & \left. - \frac{\gamma}{c^2} \frac{9((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2) ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \omega_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} \right\} \left[\vec{r}_3, \vec{r}_2 \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Substituting the radius-vector of the test body

$$\vec{r}_3 = r_{kep} (\vec{i} \cos \omega_3 t + \vec{j} \sin \omega_3 t), \quad (21)$$

and of the second body

$$\vec{r}_2 = r_2 (\vec{i} \cos \omega_2 t + \vec{j} \sin \omega_2 t), \quad (22)$$

As well as impulses as derivatives of them multiplied by the corresponding masses, and integrating over the period T (10).

Calculating (20), as a result, we get:

$$\vec{M}^{(*)} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{M}^{(*)} dt = 0. \quad (23)$$

Conclusion

Bearing in mind (23), it can be noted that in this case the sum of the vectors of the orbital angular momentum of the bodies is conserved. Indeed, it follows from the conservation of the vector that the

circular motion of the rotating test body in the field of massive rotating two bodies, providing $\vec{\omega}_i = \vec{k} \omega_z^{(i)}$ ($i = 2, 3$), is stable.

REFERENCES

- [1] Duboshin G.N. Nebesnaja mehanika. Osnovnye zadachi i metody. M.: Nauka, **1968**, 799 s.
- [2] Sebehej V. Teorija orbit: ogranichennaja zadacha treh tel. M.: Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury, **1982**, 655 s.
- [3] A. Puankare. Izbrannye trudy v 3-h tomah, Nebesnaja mehanika. M.: Nauka, t. 1, **1971**.
- [4] Kozlov V.V. Integriruemost' i neintegriruemost' v gamiltonovoj mehanike. UMN, **1983**, t. 38, № 1, S. 3-67.
- [5] Abdil'din M.M. Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna. Alma-Ata, **1988**, 198 s.
- [6] Brumberg V.A. Reljativistskaja nebesnaja mehanika. M., **1972**, 382 s.
- [7] Abdil'din M.M. O metrike vrashhajushhegosja zhidkogo shara. Voprosy teorii polja. Alma-Ata, **1985**, S. 20-25.
- [8] Landau L.D., Lifshic E.M. Mehanika. M., **1973**, 207 s.
- [9] Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B.A. On the Stability of Circular Orbits of a Test Body in the Restricted Three-Body Problem in GR Mechanics. Gravitation and cosmology, **2014**, Vol. 20, No.3, P. 149-151.
- [10] Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B.A. Ob ustojchivosti krugovyh orbit probnogo tela v ogranichennoj zadache treh tel v mehanike OTO. Izvestija NAN RK, Ser. fiz.-mat., **2014**, 2(294), S. 11-13.
- [11] Abishev Medeu, Toktarbay Saken, Beissen Nurzada, Zhumazhanova Dana. Periodic solutions of the restricted three-body problem in GR mechanics. Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, MG14 University of Rome "La Sapienza", Rome, July 12-18, **2015**.
- [12] Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B. Orbital stability of the restricted three body problem in General Relativity. WSPC Proceedings, October 14, **2015**. arXiv:1510.03703v1.
- [13] Abdil'din M.M. Problema dvizhenija tel v obshej teorii odnositel'nosti. Almaty: Izdatel'vo «Kazak universiteti», **2006**, 132 s.
- [14] Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn. Cambridge University Press, **2013**, 530 p.
- [15] Abdil'din M.M. Mehanika teorii gravitacii Jejnshtejna. Alma-Ata, **1988**, 198 s.
- [16] Abdil'din M.M. Adiabaticheskaja teorija dvizhenija tel v OTO. Dvizhenie tel v reljativistskoj teorii gravitacii; Tezisy dokl. vtorogo vsesojuznogo simpoziuma, Vil'njus-Kaunas, **1986**, S. 6-7.
- [17] Abdil'din M.M., Omarov M.S. Adiabaticheskaja teorija dvizhenija tel v OTO. Sovremennye teoreticheskie i jeksperimental'nye problemy teorii odnositel'nosti i gravitacii, Materialy VII Vsesojuznogo konf., Erevan, **1988**, S. 3-4.
- [18] Abdil'din M.M., Omarov M.S. Analiz korrektnoj metriki pervogo priblizhenija v metode Foka v OTO. Problemy fiziki zvezd i vnegalakticheskoy astronomii. Almaty, **1993**, S. 170-178.
- [19] Abdil'din M.M., Omarov M.S. Ob optimizacii vybora vektornyh jelementov v adiabaticheskoy teorii dvizhenija tel v OTO. Izvestija NAN RK, ser. fiz. -mat., Almaty, **1994**, №4, S. 17-21.
- [20] Abishev M.E., Toktarbay S., Ablayeva A.Zh., Talgat A.Z. The stability of periodic motions of the restricted three-body problem. Proceedings of the 3rd International Conference "Astrophysics, Gravity and Cosmology", Astana, **2016**, P.83 – 85.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 46 – 53

УДК 530.12:531.51

М.Е. Абишев, С. Токтарбай, А.Ж. Абылаева, А.З. Талхат, Ф.Б. Белисарова

Казахский Национальный Университет им. Аль-Фараби, г. Алматы

**УСТОЙЧИВОСТЬ ОРБИТЫ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ДВУХ МАССИВНЫХ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ**

Аннотация. В работе рассмотрена проблема орбитальной устойчивости кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел, все тела, рассматриваемые в задаче, имеют собственное вращение. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и не подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите. Задача относится к классу квазикеплеровых и рассмотрена на основе адиабатической теории движения тел в механике ОТО. Под названием адиабатическая теория движения тел подразумевается подход, развитый М.М. Абдильдиным для исследования эволюционного движения в механике ОТО. Он основан на использовании векторных элементов для описания движения, на асимптотических методах теории нелинейных колебаний и на методе адиабатических инвариантов.

Мы вывели функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. С точностью, вполне достаточной для задач релятивистской небесной механики, влиянием внутренней структуры тел можно вообще пренебречь и опустить все члены, связанные с учетом этого влияния. Мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел к их взаимным расстояниям.

Ключевые слова: Общая теория относительности, вращательное движение, поступательное движение, устойчивость движения, задача трех тел.

Введение

Основной задачей небесной механики является задача о движении системы тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т.д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных тел [1,2].

Классический метод исследования движения небесных тел заключается в представлении решения соответствующих уравнений возмущенного движения в виде отрезков рядов. Однако, Анри Пуанкаре показал, что ряды, применяемые для описания движения небесных тел, расходятся. Следовательно, их нельзя использовать для анализа поведения Солнечной системы на бесконечном интервале времени [3]. Согласно по КАМ–теории, если массы планет достаточно малы, эксцентриситеты и наклоны орбит малы, то для большинства начальных условий (исключая резонансные и близкие к ним) движение будет условно-периодическим, эксцентриситеты и наклоны будут оставаться малыми, а большие полуоси будут вечно колебаться вблизи своих первоначальных значений, то есть Солнечная система будет устойчивой по Ляпунову на бесконечном интервале времени. К сожалению, в реальной Солнечной системе резонансы играют очень важную роль. Поэтому, выводы КАМ–теории не могут быть применены к Солнечной системе в целом на всем интервале ее существования [4].

В настоящее время устойчивость солнечной системы в основном рассматривается в рамках классической механики, хотя современной теорией, описывающей движение и взаимодействие солнечной системы является общая теория относительности (ОТО). Поэтому рассмотрение задачи об устойчивости движения в рамках ОТО является весьма актуальной.

Качественные и приближенные методы исследования движения тел в ОТО играют исключительно важную роль, так как даже получить самые точные уравнения движения (кроме как для пробных тел – уравнение геодезических) практически труднодостижимо.

Строгая и корректная постановка задачи устойчивости движения тел в ОТО оказывается сложнее, чем в классической механике. Это объясняется сложностью математического аппарата ОТО и вследствие этого невозможностью получения важных физических следствий теории с помощью точных решений основных и других уравнений ОТО.

Следует также заметить, что в классической механике обычно известны точные дифференциальные уравнения, описывающие исследуемый класс движений. В ОТО, как сказано выше, точные уравнения движения известны только для пробных тел. В случае тел сравнимых масс строгая формулировка задачи устойчивости движения пока не ясна, так как в этом случае неизвестны точные уравнения движения. Они выведены только в некотором приближении. Более того, большинство задач, рассматриваемых в механике ОТО, являются квазикеплеровыми из-за малости релятивистских возмущений по сравнению с ньютоновой силой. Это обстоятельство позволяет поиск особых, оптимальных, простых методов изучения задач и других вопросов проблемы движения тел в ОТО [5-8].

В работах [9-12] исследована орбитальная устойчивость кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел в ОТО, когда все тела не имеют собственного вращения. Возмущения от движущегося по круговой орбите второго тела в области движения пробного тела (в плоскости движения второго тела) порядка релятивистских поправок движению пробного тела от центрального тела

$$U_1 \ll c^2, U_2 \ll U_1 \quad (1)$$

где U_1, U_2 – потенциалы центрального и второго тела соответственно. Положение покоящегося центрального тела совпадает с точкой отсчета координат, второе тело движется по кругу вокруг центрального (первого) тела и не подвергается возмущению. Пробное тело движется по возмущенной круговой орбите. Задача относится к классу квазикеплеровых и рассмотрена на основе адиабатической теории движения тел в механике ОТО. Под названием адиабатическая теория движения тел подразумевается подход, развитый М.М. Абдильдиным для исследования эволюционного движения в механике ОТО. Он основан на использовании векторных элементов для описания движения, на асимптотических методах теории нелинейных колебаний и на методе адиабатических инвариантов [13-19]. В результате [9] показано, что движение пробного тела в плоскости орбиты второго тела является устойчивым.

Методы исследования

В настоящей работе рассмотрим проблему орбитальной устойчивости кругового движения пробного тела в ограниченной задаче трех тел, когда все тела имеют собственное вращение. Мы вывели функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. С точностью, вполне достаточной для задач релятивистской небесной механики, влиянием внутренней структуры тел можно вообще пренебречь и опустить все члены, связанные с учетом этого влияния. Мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел к их взаимным расстояниям.

Функция Лагранжа поступательного и вращательного движения для трех вращающихся тел можно представить в виде:

$$L = L^{(0)} + L^{(*)} \quad (2)$$

где $L^{(0)}$ – функция Лагранжа для трех точечных масс, а второй член $L^{(*)}$ отвечает за поправки, содержащие вращательные члены.

Гамильтониан задачи можно представить как

$$H = H^{(0)} + H^{(*)} \quad (3)$$

где $H^{(0)}$ – Гамильтониан для трех точечных масс, а второй член $H^{(*)}$ отвечает за поправки, содержащие вращательные члены.

Запишем уравнения движения рассматриваемой задачи в представлении векторных элементов \vec{M} и \vec{A} , что удобно для применения асимптотических методов нелинейной механики, поскольку, в этом случае, в уравнениях движения налицо разделение переменных на быстрые и медленные. Последнее обстоятельство как раз и является характерной особенностью тех задач, для анализа которых применяются асимптотические методы исследования.

\vec{M} и \vec{A} – векторные элементы орбиты (момент импульса и вектор Лапласа) и равны:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (4)$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M} \right] - \gamma \frac{mm_0}{r} \vec{r}, \quad (5)$$

где

$$A = \gamma mm_0 e = \alpha e,$$

где e – эксцентриситет орбиты.

Итак, следуя методике, получим производные

$$\dot{M}_i = \left[\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i \right], \quad (6)$$

где

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + \frac{\partial H^*}{\partial p_i} = \dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \dot{\vec{r}}_i^{(*)}; \quad \dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial H_0}{\partial r_i} - \frac{\partial H^*}{\partial r_i} = \dot{\vec{p}}_i^{(0)} + \dot{\vec{p}}_i^{(*)}; \quad (7)$$

также мы можем написать уравнение (6) в следующем виде:

$$\dot{M} = \dot{M}^{(0)} + \dot{M}^{(*)} \quad (8)$$

где $\dot{M}^{(0)}$ – изменение момента для трех точечных масс, а $\dot{M}^{(*)}$ изменение момента за счет вращения тела.

Для получения уравнения эволюционного движения нужно проинтегрировать уравнение (8) по периоду повторения конфигураций системы T (синодическому периоду пробного тела):

$$\vec{M} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\vec{M}^{(0)} + \vec{M}^{(*)} \right) dt. \quad (9)$$

где

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_3}. \quad (10)$$

Первая компонента в правой части уравнения (9) описывает среднее изменение орбитального момента для трех точечных масс. В работе [9] показано, что эта величина равна нулю. Таким образом, в этом случае движение пробного тела в плоскости орбиты является устойчивым.

Рассмотрим теперь случай, когда все тела имеют собственное вращение. В уравнении (2) L^* , содержащие вращательные члены, принимает вид [20]

$$L^* = \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 I_i + \frac{1}{c^2} \left[\sum_{i=1}^3 \omega_i^2 I_i - \frac{1}{2} \left(I_2 (\vec{\omega}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2)^2 + I_3 (\vec{\omega}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3)^2 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma}{c^2} \cdot \left\{ \frac{1}{|\vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2) \cdot [3m_1 I_2 \omega_2 + 4m_2 I_1 \omega_1] - \frac{1}{|\vec{r}_3|^3} (\vec{r}_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3) \cdot [3m_1 I_3 \omega_3 + 4m_3 I_1 \omega_1] + \right. \\
& \left. + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left[(3\dot{\vec{r}}_3 - 4\dot{\vec{r}}_2) \cdot m_2 I_3 \omega_3 - (3\dot{\vec{r}}_2 - 4\dot{\vec{r}}_3) \cdot m_3 I_2 \omega_2 \right] \right\} + \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \\
& \cdot \left[-\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_3 + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \dot{\vec{r}}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \dot{\vec{r}}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right] - \frac{3\gamma}{c^2} \left[\frac{1}{|\vec{r}_2|} \cdot (m_1 \omega_2^2 I_2 + m_2 \omega_1^2 I_1) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{|\vec{r}_3|} (m_1 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_1^2 I_1) + \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} (m_2 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_2^2 I_2) \right] + \\
& + \frac{\gamma^2}{2c^2} \left\{ \frac{m_1 I_2 + m_2 I_1}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{m_1 I_3 + m_3 I_1}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 I_3 + m_3 I_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \right. \\
& \left. + m_1 m_2 I_3 \cdot \frac{\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + m_2 m_3 I_1 \cdot \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3}{|\vec{r}_2|^3 \cdot |\vec{r}_3|^3} + m_1 m_3 I_2 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2|^3} \right\} - \\
& - \frac{\gamma}{c^2} \left\{ 4 \left[\frac{I_1 I_2}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{I_1 I_3}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{I_2 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] - 3 \left[\frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2|^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Что касается гамильтониана $H^{(*)}$, то эта величина определяется соотношением:

$$H^* = \bar{v}_i \frac{\partial L^*}{\partial \bar{v}_i} - L^*; \tag{12}$$

Тогда получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
H^{(*)} = & -(\bar{\omega}_1^2 I_1 + \bar{\omega}_2^2 I_2 + \bar{\omega}_3^2 I_3) - \frac{1}{c^2} [I_1 \bar{\omega}_1^2 + I_2 \bar{\omega}_2^2 + I_3 \bar{\omega}_3^2 - \\
& - \frac{1}{2} (I_1 (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{p}_1)^2 + I_2 (\bar{\omega}_2 \cdot \bar{p}_2)^2 - I_3 (\bar{\omega}_3 \cdot \bar{p}_3)^2)] - \\
& - \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left[-\bar{p}_2 \cdot \bar{p}_3 + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \bar{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \bar{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\gamma}{c^2} \left[\frac{1}{|\vec{r}_2|} \cdot (m_1 \omega_2^2 I_2 + m_2 \omega_1^2 I_1) + \frac{1}{|\vec{r}_3|} (m_1 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_1^2 I_1) + \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} (m_2 \omega_3^2 I_3 + m_3 \omega_2^2 I_2) \right] - \\
 & - \frac{\gamma^2}{2c^2} \left\{ \frac{m_1 I_2 + m_2 I_1}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{m_1 I_3 + m_3 I_1}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{m_2 I_3 + m_3 I_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \right. \\
 & + m_1 m_2 I_3 \cdot \frac{\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + m_2 m_3 I_1 \cdot \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3}{|\vec{r}_2|^3 \cdot |\vec{r}_3|^3} + m_1 m_3 I_2 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2|^3} \left. \right\} + \\
 & + \frac{\gamma}{c^2} \left\{ 4 \left[\frac{I_1 I_2}{|\vec{r}_2|^3} + \frac{I_1 I_3}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{I_2 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] - 3 \left[\frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_2 \cdot \vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2|^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_1) \cdot (\vec{r}_3 \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3} + \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right] \right\}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

где I_i – момент инерции, $\vec{\omega}_i$ – орбитальная угловая скорость. имея в виду (7), производные

$$\dot{\vec{r}}_3^{(*)} = \frac{1}{c^2} I_3 (\vec{\omega}_3 \cdot \vec{p}_3) \vec{\omega}_3 - \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left[-\vec{p}_2 + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{p}_2) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \right]. \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{p}}_3^{(*)} = & \left\{ -\frac{3\gamma}{2c^2} (m_2 I_2 + m_3 I_3) \frac{\vec{p}_2 \vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \frac{15\gamma}{2c^2} \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} - \right. \\
 & - \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (m_2 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_2^2 I_2) + \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_2 I_3 + m_3 I_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \\
 & + \frac{\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{1}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\gamma^2}{2c^2} m_2 m_3 I_1 \frac{1}{|\vec{r}_2|^3 |\vec{r}_3|^3} + \\
 & - \frac{9((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} \left. \right\} \vec{r}_2 + \left[\vec{r}_3, \left\{ -\frac{9\gamma}{2c^2} (m_2 I_2 + m_3 I_3) \frac{\vec{p}_2 \vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} - \right. \right. \\
 & - \frac{15\gamma}{2c^2} \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} + \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_3|^3} (m_1 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_1^2 I_1) + \\
 & + \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (m_2 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_2^2 I_2) - \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_1 I_3 + m_3 I_1)}{|\vec{r}_3|^5} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_2 I_3 + m_3 I_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} - \\
 & \left. - \frac{\gamma^2}{c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{1}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_2 m_3 I_1 \frac{(\vec{r}_2 \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2|^3 |\vec{r}_3|^5} + \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_3 I_2 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{r}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5 |\vec{r}_2|^3} + \frac{12\gamma}{c^2} \frac{I_1 I_3}{|\vec{r}_3|^5} + \frac{12\gamma}{c^2} \frac{I_2 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \\
& + \frac{\gamma}{c^2} \frac{9((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2)((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3) \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} \left. \right\} \vec{r}_3 \left. \right] + \left[\vec{r}_3, \frac{\gamma}{c^2} \left\{ \frac{9(\vec{r}_3 \vec{\omega}_2)(\vec{r}_3 \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{r}_3 - \frac{3(\vec{r}_3 \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_1 + \frac{3(\vec{r}_3 \omega_1)}{|\vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_2 + \frac{3((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \vec{\omega}_3 \right\} \right]. \quad (15)
\end{aligned}$$

Результаты исследования

Здесь мы интегрируем уравнение вращательного движения пробного тела, имеющего собственное вращение, в поле вращающихся массивных двух тел. Напишем изменение момента вращательного компонента уравнения (8):

$$\dot{M}^{(*)} = [\dot{\vec{r}}^{(*)}, \vec{p}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}^{(*)}]. \quad (16)$$

Рассмотрим случай, когда угловая скорость $\vec{\omega}_i$ ($i = 2, 3$) вращающегося тела перпендикулярна к её орбитальной плоскости: т.е.,:

$$\vec{\omega}_i = \vec{k} \vec{\omega}_z^{(i)} (i = 2, 3), \quad (17)$$

$$\vec{r}_i = \vec{i} x^{(i)} + \vec{j} y^{(i)}, \quad (i = 2, 3) \quad (18)$$

и

$$\vec{p}_i = \vec{i} p_x^{(i)} + \vec{j} p_y^{(i)}, \quad (i = 2, 3), \quad (19)$$

Тогда с учетом (14) и (15) уравнение для искомой векторной функции принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{M}^{(*)} = & - \frac{\gamma}{2c^2} \cdot \frac{m_2 I_2 + m_3 I_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \cdot \left\{ [-\vec{p}_2, \vec{p}_3] + 3 \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{p}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} [(\vec{r}_2 - \vec{r}_3), \vec{p}_3] \right\} + \\
& + \left\{ - \frac{3\gamma}{2c^2} (m_2 I_2 + m_3 I_3) \frac{\vec{p}_2 \vec{p}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \frac{15\gamma}{2c^2} \frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{p}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^7} - \right. \\
& \left. - \frac{3\gamma}{c^2} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (m_2 \vec{\omega}_3^2 I_3 + m_3 \vec{\omega}_2^2 I_2) + \frac{3\gamma^2}{2c^2} \frac{(m_2 I_3 + m_3 I_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} + \right. \\
& + \frac{\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{1}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{3\gamma^2}{2c^2} m_1 m_2 I_3 \frac{(\vec{r}_3 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3))}{|\vec{r}_3|^3 |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - \frac{\gamma^2}{2c^2} m_2 m_3 I_1 \frac{1}{|\vec{r}_2|^3 |\vec{r}_3|^3} + \\
& \left. - \frac{\gamma}{c^2} \frac{9((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_2)((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \vec{\omega}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^5} \right\} [\vec{r}_3, \vec{r}_2]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Подставляя радиус-вектор пробного тела

$$\vec{r}_3 = r_{kep} (\vec{i} \cos \omega_3 t + \vec{j} \sin \omega_3 t), \quad (21)$$

и второго тела

$$\vec{r}_2 = r_2 (\vec{i} \cos \omega_2 t + \vec{j} \sin \omega_2 t), \quad (22)$$

а также импульсы как производные от них умноженные на соответствующие массы, и проинтегрировав по периоду T (10).

Вычислив (20), в результате получим:

$$\vec{M}^{(*)} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{M}^{(*)} dt = 0. \quad (23)$$

Выводы

Имея в виду (23), можно отметить, что в данном случае сумма векторов орбитальных моментов тел сохраняется. Действительно, из сохранения вектора $\vec{M}^{(*)}$ следует, что круговое движение вращающегося пробного тела в поле массивных вращающихся двух тел, при условии $\vec{\omega}_i = \vec{k} \omega_z^{(i)}$ ($i = 2, 3$) является устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968, 799 с.
- [2] Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 655 с.
- [3] А. Пуанкаре. Избранные труды в 3-х томах, Небесная механика. М.: Наука, т. 1, 1971.
- [4] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. УМН, 1983, т. 38, № 1, С. 3-67.
- [5] Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, 1988, 198 с.
- [6] Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М., 1972, 382 с.
- [7] Абдильдин М.М. О метрике вращающегося жидкого шара. Вопросы теории поля. Алма-Ата, 1985, С. 20-25.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1973, 207 с.
- [9] Abishev M.E., Toktarbay S., Zhami B.A. On the Stability of Circular Orbits of a Test Body in the Restricted Three-Body Problem in GR Mechanics. Gravitation and cosmology, 2014, Vol. 20, No.3, P. 149-151.
- [10] Абишев М.Е., Токтарбай С., Жами Б.А. Об устойчивости круговых орбит пробного тела в ограниченной задаче трех тел в механике ОТО. Известия НАН РК, Сер. физ.-мат., 2014, 2(294), С. 11-13.
- [11] Abishev Medeu, Toktarbay Saken, Beissen Nurzada, Zhumazhanova Dana. Periodic solutions of the restricted three-body problem in GR mechanics. Fourteenth Marcel Grossmann Meeting, MG14 University of Rome "La Sapienza", Rome, July 12-18, 2015.
- [12] Abishev M., Quevedo H., Toktarbay S., Zhami B. Orbital stability of the restricted three body problem in General Relativity. WSPC Proceedings, October 14, 2015. [arXiv:1510.03703v1](https://arxiv.org/abs/1510.03703v1).
- [13] Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы: Издательство «Қазақ университеті», 2006, 132 с.
- [14] Hans C. Ohanian and Remo Ruffini. Gravitation and Spacetime, 3rd edn. Cambridge University Press, 2013, 530 p.
- [15] Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата, 1988, 198 с.
- [16] Абдильдин М.М. Адиабатическая теория движения тел в ОТО. Движение тел в релятивистской теории гравитации; Тезисы докл. второго всесоюзного симпозиума, Вильнюс-Каунас, 1986, С. 6-7.
- [17] Абдильдин М.М., Омаров М.С. Адиабатическая теория движения тел в ОТО. Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Материалы VII Всесоюзного конф., Ереван, 1988, С. 3-4.
- [18] Абдильдин М.М., Омаров М.С. Анализ корректной метрики первого приближения в методе Фока в ОТО. Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. Алматы, 1993, С. 170-178.
- [19] Абдильдин М.М., Омаров М.С. Об оптимизации выбора векторных элементов в адиабатической теории движения тел в ОТО. Известия НАН РК, сер. физ. -мат., Алматы, 1994, №4, С. 17-21.
- [20] Abishev M.E., Toktarbay S., Ablayeva A.Zh., Talgat A.Z. The stability of periodic motions of the restricted three-body problem. Proceedings of the 3rd International Conference "Astrophysics, Gravity and Cosmology", Astana, 2016, P.83 – 85.

М.Е. Абишев, С. Токтарбай, А.Ж. Абылаева, А.З. Талхат, Ф.Б. Белисарова

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ.

ЕКІ МАССИВТІ АЙНАЛМАЛЫ ДЕНЕ ӨРІСІНДЕГІ АЙНАЛМАЛЫ СЫНАҚ ДЕНЕ ОРБИТАСЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Аннотация. Бұл жұмыста шектелген үш дене есебіндегі шеңбер бойымен қозғалыстағы сынақ дене орбитасының орнықтылық мәселесі қарастырылды, есепте қарастырылған барлық денелердің өздік айналуы бар.

Орталық дененің орны координаттың бас нүктесіне сәйкес келеді, екінші дене ешқандай ұйытқусыз дөңгелек орбитамен орталық денені айналады. Сынақ денесі ұйытқыған дөңгелек орбитамен қозғалады. Есеп квазикеплерлік классқа жатады, сондай-ақ Жалпы салыстырмалық теория (ЖСТ) механикасындағы қозғалыстың адиабаттық теориясы негізінде қарастырылған. Қозғалыстың адиабаталық теориясы – ЖСТ-да эволюциялық қозғалысты зерттеу үшін М.М. Абдильдин жасаған әдіс болып табылады. Бұл әдіс сызықтық емес тербеліс теориясының асимптоталық әдістері мен адиабаталық инвариант әдісі бойынша қозғалысты сипаттау үшін векторлық элементтерді қолдануға негізделген.

Біз жүйенің Лагранж функциясын екінші ретті жуықтауға дейін енгіздік. Бұл жуықтау релятивистік аспан механикасындағы проблемалар үшін жеткілікті, дененің ішкі құрылымының әсерін және онымен байланысты барлық шарттарды елемеуге болады. Біз денелердің өлшемінің олардың қашықтықтарына қатынасының дәрежесі бойынша жіктеудің нөлінші жуықтаудағы мүшелерімен ғана шектелеміз.

Тірек сөздер: Жалпы салыстырмалық теориясы, айналмалы қозғалыс, ілгерлемелі қозғалыс, қозғалыстың орнықтылығы, үш дене есебі.

Сведения об авторах:

Абишев медеу ержанович - член корр. НАН РК, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби.

Служебный адрес: Алматы, пр. аль-Фараби, физико-технический факультет КазНУ им. аль-Фараби, тел. 8(727) 377-34-14, e-mail: medeu.abishev@kaznu.kz; Домашний адрес: Алматы, Алмалинский район, 6-линия, д. 3/1, кв.28.

Токтарбай сакен - старший преподаватель кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби.

Служебный адрес: Алматы, пр. аль-Фараби, физико-технический факультет КазНУ им. аль-Фараби, тел. 8(727) 377-34-146 e-mail: saken.yan@yandex.com; Домашний адрес: Алматы, аль-Фараби 71, общ. №10.

Абылаева айгерим жомартовна - магистрант первого курса кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби, e-mail: abylayeva.aigerim@gmail.com; Домашний адрес: Алматы, 11 мкр-н, дом 9, кв.38

Талхат аманхан закиділлаұлы - магистрант первого курса кафедры теоретической и ядерной физики КазНУ им. аль-Фараби e-mail: aman_xan.95@mail.ru; Домашний адрес: Алматы, аль-Фараби 71, общ. №2.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 54 – 57

E.M. Akzhigitova¹, V.O. Kurmangalieva¹, A.B. Arbuzov²

¹Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan;

²JINR, Dubna, Russia

kzo1994@mail.ru

**DESCRIPTION OF RADIATIVE MUON DECAY
USING MODEL-INDEPENDENT APPROACH**

Annotation. The purpose of this paper theoretical studies of the radiative muon decay $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu \gamma$. This process is investigated in many modern experiments because appearance of a photon as a decay product allows one to obtain additional information about weak interactions and look for manifestations of the so-called "new physics".

Key words: muon decay, electroweak interaction, standard model etc.

Э.М. Акжігітова¹, В.О. Курмангалиева¹, А.Б. Арбузов²

¹Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

²ОИЯИ, Дубна, Россия

**ОПИСАНИЕ РАДИОЦИОННОГО РАСПАДА МЮОНА
В МОДЕЛЬНО-НЕЗАВИСИМОМ ПОДХОДЕ**

Аннотация. Основная цель данной работы – теоретическое исследование радиационного распада мюона $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu \gamma$. Этот процесс исследуется на многих современных экспериментах, потому что появление фотона в результате распада позволяет извлечь дополнительную информацию о слабых взаимодействиях и искать проявления так называемой «новой физики».

Ключевые слова: распад мюона, электрослабое взаимодействие, стандартная модель и т.д.

Введение

Слабое взаимодействие, ответственное в основном за распады элементарных частиц очень короткодействующее, радиус слабых взаимодействия около 10^{-17} см. А именно, слабое взаимодействие хорошо описывает β -распады, распад μ , распады тау-лептонов. Распад мюона $\mu^- \rightarrow e \bar{\nu}$ - это процесс, с которого обычно начинают изучение слабых распадов. Потому, что это чистый лептонный процесс, в нем не участвуют адроны.

В настоящее время радиационный распад мюона: $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu \gamma$ исследуется на многих современных экспериментах, потому что появление фотона в результате распада описывается обобщенными параметрами Мишеля и имеет большую чувствительность к другим проявлениям «новой физики». И сейчас этот эксперимент актуален и интересен. Эксперименты на *LHC (The Large Hadron Collider)*, *Belle* и *Babar* уже по распадам τ -лептона проведены [1]. И нашей задачей является описание радиационного распада мюона в модельно-независимом подходе с учетом точной зависимости $(\frac{m_e}{m_\mu})$, которое не было в прошлом сделано.

Распад мюона в Стандартной модели

Мы рассматриваем распад $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ с учетом точной зависимости от массой электрона. Мюон дает уникальные данные о слабых взаимодействиях. Лагранжиан распада мюона для общих четырех - фермионных соединений с десятью комплексными параметрами выражается в виде:

$$L_{\mu \rightarrow e \bar{\nu}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left[g_{RR}^S (\bar{e}_R v_{eL}) (\bar{\nu}_{\mu L} \mu_R) + g_{RL}^S (\bar{e}_R v_{eL}) (\bar{\nu}_{\mu R} \mu_L) + g_{LR}^S (\bar{e}_L v_{eR}) (\bar{\nu}_{\mu L} \mu_R) + g_{LL}^S (\bar{e}_L v_{eR}) (\bar{\nu}_{\mu R} \mu_L) + g_{RR}^V (\bar{e}_R \gamma^\mu v_{eR}) (\bar{\nu}_{\mu R} \gamma^\mu \mu_R) + g_{RL}^V (\bar{e}_R \gamma^\mu v_{eR}) (\bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \mu_L) + g_{LR}^V (\bar{e}_L \gamma^\mu v_{eL}) (\bar{\nu}_{\mu R} \gamma^\mu \mu_R) + g_{LL}^V (\bar{e}_L \gamma^\mu v_{eL}) (\bar{\nu}_{\mu L} \gamma^\mu \mu_L) + \frac{g_{RL}^T}{2} (\bar{e}_R \sigma^{\mu\nu} v_{eL}) (\bar{\nu}_{\mu R} \sigma_{\mu\nu} \mu_L) + \frac{g_{LR}^T}{2} (\bar{e}_L \sigma^{\mu\nu} v_{eR}) (\bar{\nu}_{\mu L} \sigma_{\mu\nu} \mu_R) + H.c. \right], \quad (1.1)$$

В стандартной модели (СМ) распад мюона описывается $V-A$ взаимодействием. В расширениях стандартной модели, любые новые взаимодействия мюонов могут проявляться в таких наблюдаемых в распаде $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, как энергетический спектр электрона, угловое распределение электрона, когда мюон поляризованный, и спиновая поляризация электрона. Дифференциальная ширина распада мюона определяется формулой [2]:

$$\frac{d^2 \Gamma(\mu^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e \nu_\mu)}{dx d\cos\vartheta} = \frac{m_\mu}{4\pi^3} W_{e\mu}^4 G_F^2 \sqrt{x^2 - x_0^2} \times (F_{IS}(x) \pm P_\mu \cos\theta_e F_{AS}(x)) \times [1 + \vec{P}_e(x, \theta_e) \cdot \zeta], \quad (1.2)$$

где $W_{e\mu} = (m_\mu^2 + m_e^2)/(2m_\mu)$, $x = E_e/W_{e\mu}$, и $x_0 = m_e/W_{e\mu} (9.7 \times 10^{-3}) \leq x \leq 1$. E_e энергия электрона, и m_e, m_μ соответственно массы электрона (позитрона) и мюона (антимюона). В формуле (1.2) знак плюс (минус) зависит от распада μ^\pm , и θ_e угла между поляризацией мюона P_μ и момента e^\pm , и ζ - измеренный направленный вектор поляризации спина e^\pm . Вдобавок, $\vec{P}_e(x, \theta_e)$ является вектором поляризации электрона (или позитрона). Функции $F_{IS}(x)$ и $F_{AS}(x)$, соответственно, изотропные и анизотропные составные части энергетического спектра e^\pm . Они имеют вид:

$$F_{AS}(x) = \frac{1}{3} \xi \sqrt{x^2 + x_0^2} (1 - x + \frac{2}{3} \delta [4x - 3 + (\sqrt{1 - x_0^2} - 1)]), \quad (1.3)$$

$$F_{IS}(x) = x(1 - x) + \frac{2}{9} \rho (4x^2 - 3x - x_0^2) + \eta x_0 (1 - x). \quad (1.4)$$

Такие константы, как ξ, ρ, δ и η называются параметрами Мишеля. Мы рассматриваем распад $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ с учетом точной зависимости от массы электрона. Дифференциальное распределение по доле энергии электрона $x \equiv \frac{2E_e}{m_\mu}$, как мы видим, описывается четырьмя параметрами Мишеля: δ, ρ, ξ и η . И их значения в рамках стандартной модели $\rho = 3/4, \eta = 0, \delta = 3/4, \xi = 1$. Параметры Мишеля учитывают возможные вклады «новой физики», они будут определены ниже. При изучении распада мюона $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ на эксперименте TWIST (Ванкувер) получили параметры Мишеля с точностью до 10^{-4} . Они согласуются с предсказанием стандартной модели с учетом экспериментальных погрешностей. Поляризацию электрона в экспериментах измерить очень трудно, поэтому ниже ее не учитываем. Малая величина $x_0 = \frac{m_e}{W_{e\mu}} (9.7 \times 10^{-3}) \leq x \leq 1$ является нижней границей спектра энергии рождающегося электрона, обычно ей можно пренебречь. Тогда формула (1.2) приходит к более простому виду:

$$\frac{d^2 \Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)}{dx d\cos\theta_e} = \frac{m_\mu^5 G_F^2}{192\pi^3} x^2 [(3 - 2x) \pm P_\mu \cos\theta_e (2x - 1)], \quad (1.5)$$

Для общего вида взаимодействий формула для времени жизни мюона приходит к виду:

$$\tau_\mu^{-1} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left[F \left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) + 4\eta \frac{m_e}{m_\mu} G \left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) - \frac{32}{3} \left(\rho - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \left(1 - \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \right) \right] \times \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\mu^2}{m_W^2} \right) \left[1 + \frac{\alpha(m_\mu)}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right], \quad (1.6)$$

где $G(r) = 1 - 9r - 9r^2 - r^3 + 6r(1 + r) \ln r$. Радиационные поправки, основанные на СМ в уравнении, используются в нормальном процессе распада мюона, так как преобладает вклад СМ.

Из уравнения (1.6), мы видим, что поправка от параметра η пропорциональна $O\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)$, тогда как вклад, пропорциональный отклонению параметра ρ от своего значений в СМ очень маленький, т.к. подавлен фактором $\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right)$. Поскольку параметр η в настоящее время измеряется с точностью около 1%, погрешность от коррекции η вносит неопределенность порядка 10^{-4} , когда оцениваем времени жизни мюона не в рамках СМ.

В Стандартной модели распада мюонов описываются взаимодействием векторных токов, образованные левыми фермионами. В то же время, многие модели за пределами СМ предсказывают вклады других видов. Поскольку энергетический масштаб «новой физики» (скорее всего) выше, чем электрослабый масштаб, соответствующие вклады могут быть параметризованные четырех-фермионными взаимодействиями различных токов и константой связи. Матричный элемент распада мюона может быть представлен в общем виде:

$$M = \frac{4G_0}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{\gamma=S,T,V \\ \varepsilon,w=R,L}} g_{\varepsilon w}^\gamma \langle \bar{l}_\varepsilon | I^\gamma | \nu_l \rangle \langle \bar{\nu}_\tau | I_\gamma | \tau_w \rangle, \quad (1.7)$$

В формуле 1.7, индекс γ обозначает тип взаимодействия: скалярное (S), векторное (V) или тензорное (T), где I^γ матрицы вида 4×4 и выражаются через матрицы Дирака:

$$I^S = 1, I^V = \gamma^\mu, I^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2\sqrt{2}} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad (1.8)$$

Индексы ε и w обозначают киральность соответственно начальных и конечных заряженных лептонов. Для заданных (ε, w) киральность нейтрино однозначно определяется. Тензорные взаимодействия могут содействовать только для противоположных киральностей заряженных лептонов. Это приводит к существованию 10 комплексных констант связи, $g_{\varepsilon w}^\gamma$. Стандартная модель предсказывает что $g_{LL}^V = 1$, а все остальные константы равны нулю. Удобно использовать следующие условие нормировки [3],[4]:

$$N \equiv \frac{1}{4} (|g_{LL}^S|^2 + |g_{LR}^S|^2 + |g_{RL}^S|^2 + |g_{RR}^S|^2) + (|g_{LL}^V|^2 + |g_{LR}^V|^2 + |g_{RL}^V|^2 + |g_{RR}^V|^2) + 3(|g_{LR}^T|^2 + |g_{RL}^T|^2) = 1. \quad (1.9)$$

Это условие соответствует использованию значения константы Ферми, извлеченное из времени жизни мюона. Эта нормировка ограничивает допустимые диапазоны констант связей до $|g^S| \leq 2$, $|g^V| \leq 1$, $|g^T| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Мы должны отметить, что точность измерения времени жизни мюонов намного выше, чем время полученное по определению с константой связи G_{Fermi} . Параметры Мишеля – билинейные комбинации констант связи $g_{\varepsilon w}^\gamma$.

Радиационный распад мюона

С момента открытия мюона в 1936 году, экспериментальные и теоретические исследования его свойства стали важной частью физики элементарных частиц. В настоящее время, радиационный распад мюона [7]:

$$\mu^-(p_\mu) \rightarrow e^-(p_e) + \nu_\mu(k_1) + \bar{\nu}_e(k_2) + \gamma(p_\gamma), \quad (1.10)$$

исследуется во многих современных экспериментах. Точное его измерение может дать информацию о структуре электрослабых процессов. В модели Ферми 4-фермионного взаимодействия дифференциальная ширина радиационного распада мюона впервые была рассмотрена в конце пятидесятых годов. Проверить теоретические характеристики для радиационного распада $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_\mu \gamma$, с появлением фотона, экспериментально было трудно, поскольку вероятность радиационного распада маленькая $\sim 10^{-4}$ по сравнению с распадом $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_\mu$. Радиационный распад мюона интересен, потому что форма спектра содержит различные угловые корреляции, в частности, между направлением спина мюона и импульсом фотона. Это позволяет извлечь из эксперимента дополнительную информацию о слабых взаимодействиях. В борновском приближении дифференциальное распределение имеет вид:

$$\frac{dB(\mu^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_\mu \gamma)}{dx dy d\Omega_e d\Omega_\gamma} = \frac{\alpha K \mathcal{E} D \beta_e}{64\pi^3 y} [F(x, y, d) \mp \beta_e P_\mu \cos \theta_e G(x, y, d) \mp \beta_e P_\mu \cos \theta_\gamma H(x, y, d)],$$

$$d = 1 - \beta_e \cos \theta_{e\gamma}, \quad \beta_e = \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{E_e^2}}, \quad (1.12)$$

где $\Omega_{\gamma e}$ представляют собой телесные углы наблюдаемых частиц конечного состояния; θ_e и θ_γ углы между спином мюона и импульсами электрона и фотона, соответственно; P_μ поляризация мюона; $\theta_{e\gamma}$ угол между импульсами электрона и фотона; y и z доля энергии электрона и фотона, соответственно, $x \equiv 2E_e/m_\mu$ и $y \equiv 2E_\gamma/m_\mu$, β_e – релятивистская скорость электрона в системе покоя мюона.

Функции F , G и H являются полиномами отношения массы электрона к массе мюона [5],[6]:

$$F(x, y, d) = \sum_{k=1}^5 (m_e/m_\mu)^k F^{(k)}, \quad F \equiv F(x, y, d), \quad G(x, y, d), \quad H(x, y, d), \quad (1.13)$$

Эти функции зависят от обобщенных параметров Мишеля ρ , η , α , δ , k , $\bar{\eta}$, ζ и β , которые можно посмотреть в приложении В. Зависимость от k , $\bar{\eta}$, α и β предоставляют важную дополнительную информацию о структуре слабого взаимодействия по сравнению с исследованием не радиационного распада мюона и тау – лептона.

Заключение

Вклад соотношения массы электрона к массе мюона имеет важное значение для современных высокоточных экспериментов по мюонному и тау – лептонному распаду, особенно по радиационным распадам.

Распады мюона является одним из самых мощных инструментов, для изучения структуры слабого взаимодействия. Его теоретическая формулировка, параметры Мишеля были исследованы за пределами стандартной модели. Также радиационный распад мюона, в котором появляется наблюдаемый фотон, предсказывается с очень высокой точностью с использованием параметров Мишеля. Это дает возможность извлечь новые комбинации параметров лагранжиана слабых взаимодействий общего вида, например, обобщенный параметр Мишеля $\bar{\eta}$. В данной работе были изучены предсказания стандартной модели для дифференциальных распределений стандартного и радиационного распадов мюона по долям энергии и угловым переменным наблюдаемых конечных частиц. Результаты могут быть использованы при анализе высокоточных экспериментальных данных по радиационным распадам τ -лептона и мюона с целью получения обобщенных параметров Мишеля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Belle Collaboration, A. Abdesselam et al., “Study of Michel parameters in leptonic τ decays at Belle”, [arXiv:1409.4969].
- [2] W. Fetscher, H. J. Gerber and K. F. Johnson, “Muon Decay: Complete Determination of the Interaction and Comparison with the Standard Model”, Phys. Lett. B 173 (1986) 102.
- [3] Particle Data Group Collaboration, K. A. Olive et al., “Review of Particle Physics”, Chin. Phys. C 38 (2014) 090001.
- [4] W. Fetscher, H.J. Gerber, "Muon decay parameters", in K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, Vol.38, 090001 (2014).
- [5] A.B. Arbuzov, E.S. Scherbakova, "One loop corrections to radiative muon decay," Phys. Lett. B, Vol.597, 285 (2004) [hep-ph/0404094].
- [6] A.B. Arbuzov, "First order radiative corrections to polarized muon decay spectrum," Phys. Lett. B, Vol.524, 99 (2002) [hep-ph/0110047].
- [7] M. Fael, L. Mercolli and M. Passera, “Radiative μ and τ leptonic decays at NLO, JHEP” 1507 (2015) 153 [arXiv:1506.03416].

Э.М. Ақжігітова¹, В.О. Құрманғалиева¹, А.Б. Арбузов²

¹Эл- Фараби атындағы Қазак Ұлттық Университеті, Алматы, Қазакстан; ²БЯЗИ, Дубна, Ресей

МЮОННЫҢ РАДИАЦИЯЛЫҚ ҮДЫРАУЫН МОДЕЛЬДЕН ТӘУЕЛСІЗ ТҮРДЕ СИПАТТАУ

Аннотация. Бұл жұмыстың негізгі мақсаты, радиациондық мюонның ыдырауын $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_\mu \gamma$ теоретикалық түрде зерттеу. Бұл процесс көптеген заманауи эксперименттерде зерттелуде, себебі ыдырау есебінен фотонның шығуы әлсіз әсерлесу жайлы қосымша мәліметтер алуға және «жаңа физиканың» көріністерін іздеуге көмектеседі.

Тірек сөздер: мюонның ыдырауы, әлсіз электрлік әсерлесу, стандарттық модель және т.б.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 58 – 63

UDC 536.46:532.517.4

**A.S. Askarova, S.A. Bolegenova, S.A. Bolegenova,
V.Yu. Maximov, Zh.K. Shortanbaeva**

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty
Bolegenova.symbat@kaznu.kz

**NUMERICAL MODELING OF BURNING PULVERIZED COAL
IN THE COMBUSTION CHAMBER OF THE BOILER PK 39**

Annotation. In the cities of Kazakhstan, the atmospheric air is polluted by many harmful ingredients, particularly it is an acute problem for the city of Almaty, where a high level of pollution contributes to the total emissions of vehicles, industrial enterprises, as well as the unique geographical conditions of the city. Among the heat sources the bulk of emissions at major sources district heating CHP plants at different levels, district heating plants, etc.

Heat power engineering of Kazakhstan is focused on the use of high-ash coal, primarily of Ekibastuz basin, where there is active mining of cheap coal by open method. Due to the adopted technology of production of high-ash coal from Ekibastuz field and use them without prior enrichment, the natural environment experiences significant anthropogenic pressure. A large part of the coal, for example, from Ekibastuz has a low quality, high ash content. The ash content of domestic coal reaches 10-55%. Accordingly, the dust content of flue gases changes, reaching for high-ash coal of 60-70 g/m³.

Keywords: combustion chamber, boiler, burners, solid fuel, high-ash coal, pulverized condition, combustion, aerodynamics, numerical simulation, computational experiment.

УДК 536.46:532.517.4

**А.С. Аскарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова,
В.Ю. Максимов, Ж.К. Шортанбаева**

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
СЖИГАНИЯ ПЫЛЕУГОЛЬНОГО ТОПЛИВА
В ТОПОЧНОЙ КАМЕРЕ КОТЛА ПК 39**

Аннотация. В городах Казахстана атмосферный воздух загрязнен многими вредными ингредиентами, особенно остро эта проблема стоит для города Алматы, где высокому уровню загрязнения способствует суммарный выброс автотранспорта, промышленных предприятий, а также уникальные географические условия города. Среди теплоэнергоисточников основная доля выбросов приходится на крупные источники централизованного теплоснабжения: ТЭЦ, ГРЭС разных уровней, районные котельные и т.п.

Теплоэнергетика Казахстана ориентирована на использование высокозольных углей, преимущественно Экибастузского бассейна, где ведется добыча дешевых углей открытым способом. В результате принятой технологии добычи высокозольных углей Экибастузского месторождения и использования их без предварительного обогащения природная среда испытывает значительную антропогенную нагрузку. Большая часть угля, например, из Экибастуза, имеет низкое качество - высокую зольность. Зольность отечественных углей достигает 10-55%. Соответственно изменяется и запыленность дымовых газов, достигая для высокозольных углей 60-70 г/м³.

Ключевые слова: топочная камера, котел, горелки, твердое топливо, высокозольный уголь, пылевидное состояние, горение, аэродинамика, численное моделирование, вычислительный эксперимент.

Значительный интерес для энергетики представляют исследования в области минимизации антропогенного воздействия на среду, разработка новых и совершенствование существующих технологических процессов, обеспечивающих снижение выбросов в атмосферу загрязняющих веществ и одновременно улучшение основных показателей энергетических комплексов. В этой связи исследования по разработке оптимальных технологических процессов сжигания твердого топлива и использование альтернативных методов организации процесса горения различных видов топлив являются в настоящее время наиболее актуальными для всего энергетического комплекса Республики Казахстан.

Основным направлением совершенствования пылеугольного горения и использования альтернативных видов топлива является выполнение жестких экологических требований по удельным выбросам вредных веществ с отработанными газами котельных установок. И на этом этапе создание технологий, позволяющих описать основные процессы формирования вредных пылегазовых выбросов и разработка рекомендаций по их снижению, является актуальной задачей исследователей.

В работе приводятся результаты моделирования конвективного теплопереноса при ступенчатом сжигании пылеугольного топлива и его аэродинамические характеристики. Весь численный эксперимент был проведен для топочной камеры котла ПК 39. В качестве топлива использовался высокозольный казахстанский уголь Экибастузского угольного бассейна.

Как было сказано выше, на этом котле установлено 12 вихревых горелок. Вихревые горелки по принципу действия можно считать индивидуальными. В топках, в которых они используются, зажигание факела и процесс выгорания организуются преимущественно с помощью самих горелок и в меньшей мере компоновкой их в топке. Поэтому работа топки, в особенности на начальном участке, может быть экспериментально исследована на стенде с одиночной горелкой.

Получение аэродинамических характеристик отдельного факела и потоков движения газов в топочной камере позволяет с достаточной степенью приближения оценить эффективность организации топочного процесса и использовать эти данные при численном моделировании. А поскольку на горизонтальном участке факела (2-3 диаметра горелки) может выгорать примерно до 90% топлива, то при математическом моделировании процессов конвективного теплопереноса в камерах сгорания очень важно правильно задать начальные и граничные условия по скорости, которые бы соответствовали принятой на котле схеме сжигания.

Основные условия правильной организации топочного процесса определяются в известной мере аэродинамикой топочного пространства, которая, в свою очередь, зависит от формы и размеров топочной камеры, а также от конструкции, режимов работы и компоновки горелочных устройств. Особенностью потоков в вихревом факеле при сильной крутке является возникновение встречного течения в приосевой области струи вблизи от насадка. Наличие зоны обратных токов топочных газов, аналогичной следу за плохо обтекаемым телом, играет, как известно, основную роль в явлениях стабилизации пламени, т.к. от теплосодержания этих газов зависит прогрев топлива, выход летучих и их воспламенение. Чем дальше от устья горелки начнется формирование зоны осевых обратных токов, тем больше вероятность попадания в нее высокотемпературных топочных газов. При этом прогревается не вся струя, а только те ее слои, которые расположены вблизи границы зоны осевых обратных токов. Тепло от сгорания летучих и мелкой фракции коксового остатка в этой области идет на прогрев соседних слоев топливовоздушной смеси и т.д. [1-4].

Были рассчитаны поля вектора полной скорости по всему объему камеры сгорания, которые представлены на рисунках 1-4 в трехмерном изображении для различных сечений топочной камеры. Полученные скоростные поля позволяют наглядно проанализировать движение реагирующих потоков в топочном пространстве в различных сечениях. Поля вектора полной скорости $v = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ показывают величину скорости течения среды и ее направление в каждой точке.

Рисунок 1 иллюстрирует картину распределения скоростей в продольном сечении топочного пространства, и характеризует поведение пылеугольного потока внутри камеры сгорания. Отчетливо видны области подачи топлива с различными скоростями через горелки двух ярусов. В центре выделяется зона, в которой наблюдается сгущение линий потока, что способствует

улучшению смесеобразования и повышению интенсивности тепломассообмена в этой области. Как видно из рисунка 1 ядро факела смещается к центру топочного пространства и определяется областью столкновения потоков из противогорелок. Ниже плоскости сечения горелок потоки от горелок совместно с потоком неорганизованного воздуха, подсасываемого из нижней воронки образуют встречные вихри со скоростями, направленными вниз в плоскости (XY). В области этой воронки наблюдается возвратное течение вверх. Эти потоки воздуха, поступая в нижний вихрь, понижают температуру поджигающих газов, что существенно может сказаться на температурных и концентрационных условиях для воспламенения и горения в основной зоне. По мере удаления от области распространения струй из горелок поле скоростей выравнивается и к выходу скорость газов снижается.

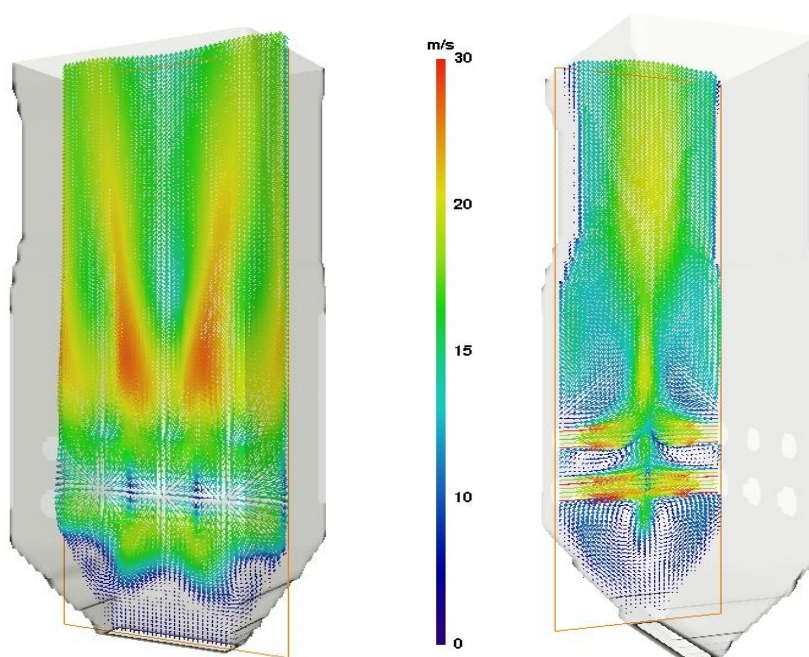
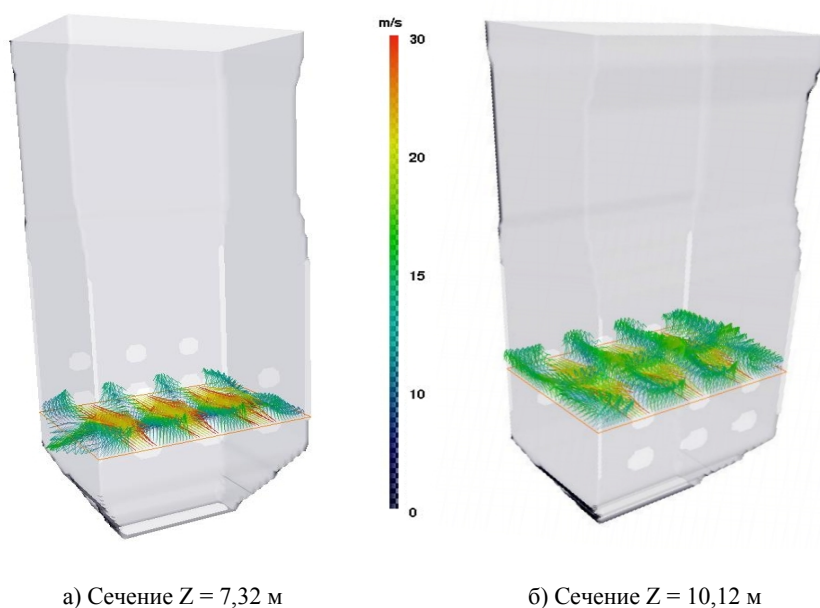


Рисунок 1 – Вектор полной скорости в продольном сечении топочной камеры котла ПК-39



а) Сечение $Z = 7,32$ м

б) Сечение $Z = 10,12$ м

Рисунок 2 – Трехмерное поле вектора полной скорости в сечении горелок топочной камеры котла ПК-39

Закрученные струи, подающие в топливо через встречные горелки, расположенные в плоскости (XY) при $Z = 7,32$ м (рисунок 2а) и $Z = 10,12$ м (рисунок 2б), создают объемное завихренное течение в центральной области топочной камеры. Часть потока под небольшим углом направляется вниз, развиваясь в два вихря (рисунки 1-2). Благодаря интенсивному вихревому движению пылегазовых потоков внутри топочной камеры существенно возрастает время пребывания частиц топлива в топке, что позволяет добиться более полного выгорания, а в техническом плане возможно применение угольной пыли более крупных фракций.

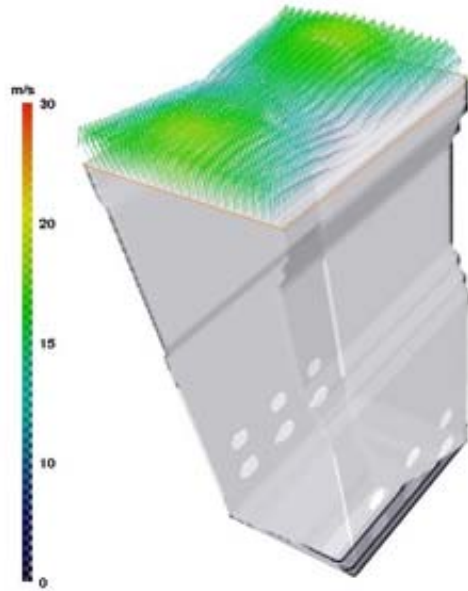
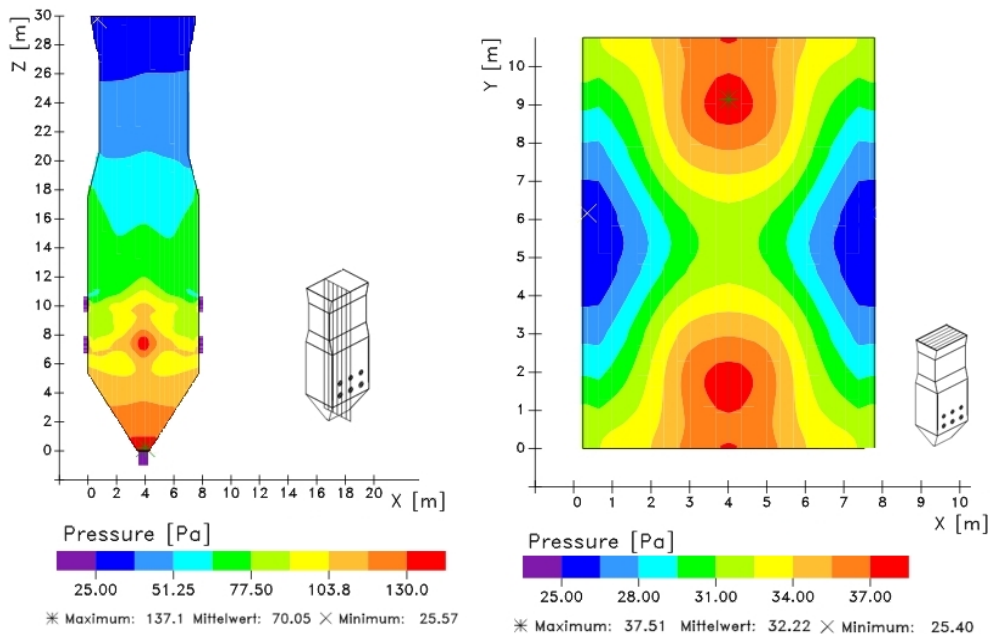


Рисунок 3 – Трехмерное поле вектора полной скорости на выходе из камеры $Z = 29,79$ м котла ПК-39



в) Сечение $Y = 5,38$ м

г) Сечение $Z = 29,79$ м

Рисунок 4 – Распределение давления в топочной камере в различных сечениях котла ПК-39

Глубокое взаимное проникновение встречных струй и наличие поперечных градиентов скорости турбулизует поток. Значительная турбулизация потока имеет место при хорошем заполнении топочного пространства, а, следовательно, при увеличенном времени пребывания горючей смеси в топочном пространстве. Наличие вращения потоков в пристеночной зоне способствует равномерному обогреву поверхностей и снижению шлакования экранов, что позволяет уменьшить коррозию и тепловой перегрев.

По мере удаления от плоскости расположения горелок поле скоростей выравнивается, восходящий поток расширяется, и вихревой характер течения ослабевает (рисунок 3). К выходу из топочной камеры восходящий поток интенсивно расширяется и на выходе равномерно распределяется по всему.

Распределение давления в продольном сечении топочной камеры и на выходе из нее представлено на рисунке 4. Как видно из рисунков, наиболее сильное изменение давления происходит в области расположения горелок, т.е. в области подачи топлива и окислителя. По мере удаления от этой области горелок давление монотонно убывает и на выходе среднее расчетное значение составляет величину $p \sim 25,4$ Па.

Проведенные численные исследования аэродинамических характеристик процесса горения в топочном пространстве свидетельствуют о сложности протекающего процесса. Полученные результаты говорят о том, что в зоне расположения горелок имеется вихревое течение, обусловленное расположением горелочных устройств и вихревым способом подачи пылеугольных потоков в топочное пространство. Наличие вихревого движения обеспечивает более быстрое зажигание и стабилизацию пламени. Вихревой характер движения потоков внутри топочной камеры приводит к усилению зажигания факела на выходе из горелочного устройства, а усиленный тепломассообмен в вихре интенсифицирует выгорание. При этом удается добиться равномерного обогрева поверхностей топочной камеры и снизить их шлакование, что продлевает срок действия оборудования. При таком способе организации распространения пылегазовых потоков в топочном пространстве создаются благоприятные условия для интенсификации процесса горения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Bekmukhamet A., Sh. Ospanova Numerical research of aerodynamic characteristics of combustion chamber BKZ-75 mining thermal power station // *Journal Procedia Engineering*. – Prague, 2012. – № 42. – P. 1365-1370.
- [2] Askarova A.S., LavrishchevaY., Messerle V., Ustimenko A., Karpenko, E. Plasma-Supported Coal Combustion in Boiler Furnace // *J. "Plasma Science", IEEE Transactions*, 2007. –Vol. 35, №6. – P. 1607-1616.
- [3] Askarova A., Bolegenova S., Bekmukhamet A., Maximov V., Beketayeva M., Ospanova Sh. Gabitova Z.K. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber // **WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer.** – 2014. Vol. 9. – P.39-50.
- [4] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov Yu.V., Bekmukhamet A., Beketaeva M.T., Gabitova Z.Kh. Control of harmful emissions concentration into the atmosphere of megacities of Kazakhstan Republic // 2014 International Conference on Future Information Engineering (FIE 2014), *IERI Procedia*. – Beijing, 2014. P. 252-258.

REFERENCES

- [1] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Bekmukhamet A., Sh. Ospanova Numerical research of aerodynamic characteristics of combustion chamber BKZ-75 mining thermal power station. *Journal Procedia Engineering*. Prague, 2012. 42. 1365-1370.
- [2] Askarova A.S., LavrishchevaY., Messerle V., Ustimenko A., Karpenko, E. Plasma-Supported Coal Combustion in Boiler Furnace. *J. "Plasma Science", IEEE Transactions*. 2007. 35.6. 1607-1616.
- [3] Askarova A., Bolegenova S., Bekmukhamet A., Maximov V., Beketayeva M., Ospanova Sh. Gabitova Z.K. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber. **WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer**. 2014. 9. 39-50.
- [4] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov Yu.V., Bekmukhamet A., Beketaeva M.T., Gabitova Z.Kh. Control of harmful emissions concentration into the atmosphere of megacities of Kazakhstan Republic. *International Conference on Future Information Engineering (FIE 2014), IERI Procedia*. Beijing. 2014. 252-258.

ӘОЖ: 536.46:532.517.4

Ә.С. Асқарова, С.Ә. Бөлегенова, С.Ә. Бөлегенова, В.Ю. Максимов, Ш.С. Оспанова

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ПК-39 ҚАЗАНДЫҒЫНЫҢ ЖАНУ КАМЕРАСЫНДАҒЫ ШАҢ ТОЗАҢДЫ КӨМІР ОТЫНЫН ЖАҒУ ПРОЦЕСІН САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Аннотация. Қазақстан қалаларында атмосфералық ауа көптеген зиянды қоспалармен ластанған, әсіресе бұл мәселе Алматы қаласы үшін өзекті болып табылады, себебі ластанудың жоғары деңгейіне автокөліктердің, өнеркәсіптік кәсіпорындарының қалдықтарының қосылып шығарылуы, сондай-ақ қаланың қолайлы географиялық орналасуы әсер етеді. Жылу энергия көздерінің ішінде қалдықтардың негізгі үлесі орталықтанған жылумен жабдықтау көздеріне кіреді: ЖЭО, әртүрлі деңгейдегі МАЭС, аудандық қазандықтар және т.б.

Қазақстан жылуэнергетикасы күлділігі жоғары көмірлерді қолдануға бағытталған, Екібастұз алабындағы ашық әдіс арқылы алынатын арзан көмір есебінен жүргізіледі. Екібастұз өңірінің күлділігі жоғары көмірін пайдалану технологиясы мен оларды алдын ала байытуынсыз қолдану нәтижесінде қоршаған орта елеулі антропогендік қысым көруде. Көмірдің көп бөлігі, мысалы Екібастұз көмірінің сапасы төмен, ал күлділігі жоғары. Отандық көмірлердің күлділігі 10-55% жетеді. Сәйкесінше түгіндік газдың тозаңдылығы өзгереді, күлділігі жоғары көмірлер үшін 60-70 г/м³ жетеді.

Түйін сөздер: жану камерасы, қазандық, жанарғы, күлділігі жоғары көмір, шаңдық күй, жану, аэродинамика, сандық модельдеу, сандық тәжірибе.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 64 – 68

UDC 530.12

M. Abishev¹, A. Malybayev¹, H. Quevedo²

¹Physical-Technical Faculty, Al-Farabi Kazakh National University,
Al Farabi av. 71, 050040 Almaty, Kazakhstan

²Institute of Nuclear Sciences, National Autonomous University of Mexico
AP 70543, Mexico, DF 04510, Mexico

GEOMETROTHERMODYNAMICS OF THE IDEAL GAS

Abstract. The goal of this work is to describe the formalism of geometrothermodynamics (GTD) and to corroborate some of its most important assumptions. To this end, the GTD formalism is used to find the thermodynamic properties of the ideal gas. Using this method, we calculate the metric of the space of equilibrium states, the Christoffel symbols, the components of the Riemann Ricci, and Einstein tensors as well as the scalar curvature. As a result, we corroborate one of the most important ideas of GTD, namely, that the curvature of the space of equilibrium states is a measure of the interaction between the components of the thermodynamic system; this is shown in the particular case of the ideal gas. The formalism of GTD can be used to analyze other thermodynamic system as, for example, black holes.

Keywords: geometrothermodynamics, phase space, equilibrium space, entropy representation, thermodynamic curvature.

УДК 530.12

М.Абишев¹, А. Малыбаев¹, Э. Кеведо²

¹КазНУим. аль-Фараби, физико-технический факультет, г. Алматы. Республика Казахстан;

²Мексиканский национальный университет, г. Мехико, Мексика

ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Аннотация. Целью данной работы является описание формализма геометротермодинамики (ГТД) и подтверждение его основных положений. Для достижения этой цели использовался метод формализма ГТД для расчета термодинамических свойств идеального газа. С помощью этого метода были посчитаны: метрика пространства равновесных состояний идеального газа, символы Кристоффеля, компоненты тензора Римана, компоненты тензора Риччи, компоненты тензора Эйнштейна и скалярная кривизна. В результате была подтверждена одна из основных идей формализма ГТД о том, что кривизна пространства равновесных состояний является мерой взаимодействия между компонентами термодинамической системы, в частности, для идеального газа. Формализм ГТД может быть использован для исследования других термодинамических систем, например, черных дыр.

Ключевые слова: геометротермодинамика, фазовое пространство, пространство равновесных состояний, энтропийное представление, термодинамическая кривизна.

Введение. В этой работе мы объясним основные положения формализма геометротермодинамики (ГТД) [1]. На примере идеального газа с помощью ГТД исследуем его термодинамические свойства. Существует связь между теорией относительности и термодинамикой. Эту связь можно показать с помощью формализма ГТД. В формализме ГТД используются геометрические подходы, которые используются в общей теории относительности (ОТО).

Для описания термодинамической системы в ГТД, необходимо сделать следующее:

- построить термодинамическое фазовое пространство \mathcal{T} , подпространством которого является пространство равновесных состояний \mathcal{E} , геометрические свойства которого описывают термодинамические свойства соответствующей термодинамической системы.

- Затем вводится фундаментальная форма Гиббса θ .

- Для пространства \mathcal{T} вводят так называемую термодинамическую метрику G .

- Затем находим метрику g для пространства равновесных состояний \mathcal{E} .

- Зная метрику g , мы рассчитываем кривизну пространства равновесных состояний, которая называется термодинамической кривизной.

Согласно формализму ГТД тензор кривизны (термодинамическая кривизна) является мерой взаимодействия между компонентами термодинамической системы.

Триплет (\mathcal{T}, θ, G) называется Римановым контактным множеством и оно выражает структуру и геометрические свойства классической термодинамической системы.

Геометротермодинамика простых систем. Остановимся более подробно на этих пунктах.

Для построения \mathcal{T} необходимо определить: экстенсивные переменные, например, энтропию S , объём V , затем интенсивные переменные, скажем температуру T , давление P , а также термодинамический потенциал, скажем внутреннюю энергию U . Эти термодинамические переменные используются как координаты в 5-мерном фазовом пространстве $\mathcal{T}(S, U, V, T, P)$.

Для пространства равновесных состояний \mathcal{E} в качестве координат мы выбираем переменные (S, V) . Затем вводится фундаментальная форма Гиббса θ , которая имеет вид:

$$\theta = dU - TdS + PdV \quad (1)$$

В этом случае фундаментальное уравнение имеет энергетическое представление [2]:

$$U = U(S, V). \quad (2)$$

Для описания структуры пространства \mathcal{T} вводят так называемую термодинамическую метрику $G(S, U, V, T, P)$. Фундаментальная форма Гиббса θ и метрика G инвариантны относительно преобразований Лежандра для случая системы с 2 термодинамическими степенями свободы (S, V) , то есть геометрическая структура фазового пространства \mathcal{T} инвариантна относительно преобразований Лежандра.

Для случая системы с двумя степенями свободы, использующей энергетическое представление, преобразования Лежандра для фазового пространства \mathcal{T} выражаются как преобразование координат в следующем виде: $(U, S, V, T, P) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{T}, \tilde{P})$. Эти преобразования можно осуществить следующими способами [3]:

$$\tilde{U}_1 = U - TS, \quad S = -\tilde{T}, \quad T = \tilde{S}, \quad V = \tilde{V}, \quad P = \tilde{P} \quad (3)$$

$$\tilde{U}_2 = U + PV, \quad S = \tilde{S}, \quad T = \tilde{T}, \quad V = \tilde{P}, \quad -P = \tilde{V} \quad (4)$$

$$\tilde{U}_3 = U - TS + PV, \quad S = -\tilde{T}, \quad T = \tilde{S}, \quad V = \tilde{P}, \quad -P = \tilde{V} \quad (5)$$

где $\tilde{U}_1 = F$ свободная энергия Гельмгольца,

$$\tilde{U}_2 = H \text{ энтальпия,}$$

$$\tilde{U}_3 = G \text{ потенциал Гиббса.}$$

Если через $\tilde{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3$ мы обозначим результат, полученный после применения преобразования Лежандра (3)-(5) к фундаментальной форме Гиббса θ , то можно показать, что:

$$\tilde{\theta}_i = d\tilde{U}_i - \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{P}d\tilde{V} \quad (6)$$

это означает, что θ является Лежандр-инвариантным геометрическим объектом.

В формализме ГТД необходимо, чтобы метрика G для фазового пространства \mathcal{T} тоже являлась Лежандр-инвариантной. Метрику G можно написать в следующем виде [4]:

$$G = (dU - TdS + PdV)^2 + (ST)^{2k+1} dSdT + (VP)^{2k+1} dVdP \quad (7)$$

Если через \tilde{G}_i , $i=1,2,3$ мы обозначим результат, полученный после применения преобразования Лежандра (3)-(5) к метрике G , можно показать, что:

$$\tilde{G}_i = (d\tilde{U}_i - \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{P}d\tilde{V})^2 + (\tilde{S}\tilde{T})^{2k+1} d\tilde{S}d\tilde{T} + (\tilde{V}\tilde{P})^{2k+1} d\tilde{V}d\tilde{P} \quad (8)$$

это означает, что G является Лежандр-инвариантным геометрическим объектом.

Следующим важным элементом ГТД является пространство равновесных состояний \mathcal{E} . В качестве координат \mathcal{E} возьмем следующий набор экстенсивных переменных (S, V) . Тогда оставшиеся координаты \mathcal{T} должны быть функциями S и V , то есть:

$$U = U(S, V), \quad T = T(S, V), \quad P = P(S, V) \quad (9)$$

Далее мы требуем, чтобы проекция фундаментальной формы Гиббса θ на пространство равновесных состояний \mathcal{E} была равна нулю:

$$\theta|_{\mathcal{E}} = 0 \Leftrightarrow dU = TdS - PdV \quad (10)$$

Так как $U = U(S, V)$, следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -P \quad (11)$$

В классической термодинамике эти соотношения являются условиями термодинамического равновесия. Проецируя метрику G фазового пространства \mathcal{T} на \mathcal{E} , можно получить метрику g для пространства равновесных состояний:

$$G|_{\mathcal{E}} = g = g(S, V) \quad (12)$$

Тогда имеем, используя (10)-(12):

$$g = \left(S \frac{\partial U}{\partial S} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} dS^2 + \left(V \frac{\partial U}{\partial V} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} dV^2 + \left[\left(S \frac{\partial U}{\partial S} \right)^{2k+1} + \left(V \frac{\partial U}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} dSdV \quad (13)$$

В дальнейшем для системы с двумя степенями свободы мы будем использовать энтропийное представление. Тогда фундаментальное уравнение имеет вид $S = S(U, V)$. Преобразуя уравнение (1) можно получить энтропийное представление формы Гиббса θ :

$$\theta_s = dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \quad (14)$$

Тогда фазовое пространство \mathcal{T} будет иметь следующие координаты $(S, U, V, \beta, \vartheta)$, где $\beta = \frac{1}{T}$, $\vartheta = \frac{P}{T}$. В этом случае метрика G фазового пространства \mathcal{T} будет иметь вид:

$$G_s = \left(dS - \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV \right)^2 + \left(\frac{U}{T} \right)^{2k+1} dUd\left(\frac{1}{T}\right) + \left(\frac{VP}{T} \right)^{2k+1} dVd\left(\frac{P}{T}\right) \quad (15)$$

Преобразования Лежандра для фазового пространства \mathcal{T} выражаются как преобразование координат в следующем виде: $(U, S, V, \beta, \vartheta) \rightarrow (\tilde{U}, \tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{\beta}, \tilde{\vartheta})$. Эти преобразования можно осуществить следующими способами:

$$\tilde{S}_1 = S - U\beta, \quad U = -\tilde{\beta}, \quad \beta = \tilde{U}, \quad V = \tilde{V}, \quad \vartheta = \tilde{\vartheta} \quad (16)$$

$$\tilde{S}_2 = S - V\vartheta, \quad U = \tilde{U}, \quad \beta = \tilde{\beta}, \quad V = -\tilde{\vartheta}, \quad \vartheta = \tilde{V} \quad (17)$$

$$\tilde{S}_3 = S - U\beta - V\vartheta, \quad U = -\tilde{\beta}, \quad \beta = \tilde{U}, \quad V = -\tilde{\vartheta}, \quad \vartheta = \tilde{V} \quad (18)$$

Здесь для пространства равновесных состояний \mathcal{E} в качестве координат возьмем экстенсивные переменные (U, V) . Тогда оставшиеся координаты \mathcal{T} должны быть функциями U и V :

$$S = S(U, V), \quad \beta = \beta(U, V), \quad \vartheta = \vartheta(U, V) \quad (19)$$

Как ранее было отмечено, требуем следующие условия:

$$\theta_s|_{\mathcal{E}} = 0, \quad G_s|_{\mathcal{E}} = g_s = g_s(U, V) \quad (20)$$

Из первого условия получаем:

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV, \quad \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T} \quad (21)$$

Из второго условия получаем:

$$g_s = \left(U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} dU^2 + \left(V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} dV^2 + \left[\left(U \frac{\partial S}{\partial U} \right)^{2k+1} + \left(V \frac{\partial S}{\partial V} \right)^{2k+1} \right] \frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} dU dV \quad (22)$$

Пространство равновесных состояний идеального газа. Для случая идеального газа фундаментальное уравнение в энтропийном представлении имеет вид [5]:

$$S(U, V) = S_0 + Nk_B c_V \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + Nk_B \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \quad (23)$$

Используя условия термодинамического равновесия можно посчитать интенсивные термодинамические переменные T и P для идеального газа:

$$\frac{1}{T} = \frac{Nk_B c_V}{U}, \quad \frac{P}{T} = \frac{Nk_B}{V} \quad (24)$$

Подставляя эти соотношения в общую формулу для метрики g_s получаем простую метрику для пространства равновесных состояний идеального газа:

$$g_s = -(Nk_B)^{2k+2} \left[c_V^{2k+2} \frac{dU^2}{U^2} + \frac{dV^2}{V^2} \right] \quad (25)$$

Расчеты показывают, что:

- компоненты символа Кристоффеля $\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{U}$, и $\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{V}$, а остальные компоненты равны нулю $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$
- все компоненты тензора Римана равны нулю $R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma, \sigma = 0, 1$
- все компоненты тензора Риччи равны нулю $R_{\alpha\beta} = 0$, где $\alpha, \beta = 0, 1$

- все компоненты тензора Эйнштейна равны нулю $E_{\alpha\beta} = 0$, где $\alpha, \beta = 0, 1$
- скалярная кривизна равна нулю $R = 0$

Последний результат означает отсутствие термодинамического взаимодействия в идеальном газе. Этот факт подтверждает правоту одной из основных идей ГТД о том, что кривизна пространства равновесных состояний является мерой термодинамического взаимодействия.

Напомним, что в теории относительности также существует пространство нулевой кривизны - это пространство Минковского. Отсюда следует, что идеальный газ является самой простой термодинамической системой в ГТД, также как пространство Минковского является самым простым примером в теории относительности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Quevedo H. *Journal of Mathematical Physics*. **2007**, 48, 013506
- [2] Callen H.B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. **1985**, Wiley, New York
- [3] Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. **1980**, Springer, New York
- [4] Vazquez A., Quevedo H., Sanchez A. *Journal of Geometry and Physics*. **2010**, 60, p. 1942-1949
- [5] Quevedo H., Sanchez A., Vazquez A. *General Relativity and Gravitation*. **2015**, 47, article id. 36, 18 pp.

REFERENCES

- [1] Quevedo H. *Journal of Mathematical Physics*. **2007**, 48, 013506
- [2] Callen H.B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. **1985**, Wiley, New York
- [3] Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. **1980**, Springer, New York
- [4] Vazquez A., Quevedo H., Sanchez A. *Journal of Geometry and Physics*. **2010**, 60, p. 1942-1949
- [5] Quevedo H., Sanchez A., Vazquez A. *General Relativity and Gravitation*. **2015**, 47, article id. 36, 18 pp.

М. Әбішев¹, А. Малыбаев¹, Э. Кеведо²

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

²Мексика ұлттық университеті, Мехико, Мексика

МІНСІЗ ГАЗДЫҢ ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКАСЫ

Аннотация. Берілген жұмыстың мақсаты геометротермодинамиканың (ГТД) формализмін сипаттау және оның негізгі тұжырымдарын растау болып табылады. Бұл мақсатқа жету үшін идеал газдың термодинамикалық қасиеттерін есептеуде ГТД формализмі қолданылды. Бұл әдіс көмегімен: идеал газдың тепе-теңдік күйінің кеңістіктік метрикасы, Кристоффель символдары, Риман тензорының компоненттері, Риччи тензорының компоненттері, Эйнштейн тензорының компоненттері және скалярлық қисықтық есептелінді. Нәтижесінде ГТД формализмінің негізгі идеяларының бірі тепе-теңдік күйдегі кеңістік қисықтығы термодинамикалық жүйенің компоненттері арасындағы өзара әсерлесу өлшемі болып табылатындығы, идеал газ дербес жағдайы үшін расталды. ГТД формализмі басқа термодинамикалық жүйелерді, мысалы, қара құрдымды зерттеу үшін қолданылуы мүмкін.

Тірек сөздер: геометротермодинамика, фазалық кеңістік, тепе-теңдік кеңістік, энтропиялық көрініс, термодинамикалық қисықтық.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 69 – 74

UDC 531.1+629.195

**M.D. Shinibaev¹, A.A. Bekov¹, B.N. Rahimganov¹, S.B. Momynov¹,
 A.G. Sadybek², S.S. Dairbekov², S.A. Zholdasov²**

¹ National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan;

² University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan

E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

PERTURBED ORBIT OF A CIRCULAR TYPE FOR THE HILL SECOND TASK

Annotation. It is known that the Hill second intermediate orbit has found application in the theory of satellites motion [1, p.3]. Small parameter method has not yet been used in studies of the Hill second intermediate orbit.

This method in the [2, p.30] is given the following characteristics: “Method for constructing periodic solutions of nonlinear systems proposed by Henri Poincaré has two features that should be borne in mind in practical use:

1. Procedure is effective only in the construction of periodic solutions of weakly nonlinear systems, as μ -little.

2. The construction of each of the following approximation becomes harder than that of the first”. Of course, it is generally true.

This article shows that in solving nonlinear differential equations of the perturbed Hill circular problem, paragraph 2 becomes untenable. The reason is that the solutions of the second approximation have numerical coefficients, which have small order, which sharply reduces the amount of computation.

There is an opinion that the Poincaré small parameter method does not characterize the evolution and oscillation of the perturbed orbits. This view was also wrong.

Key words: the Hill second task, perturbed orbit of a circular type, Poincaré small parameter method, the angular frequency, free nonlinear salutation, oscillation, evolution.

Let us consider the plane perturbed Hill circular problem [1, c. 61]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = vx^3, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} = vy^3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where v – small parameter, $r^2 = x^2 + y^2 = \text{const}$.

We introduce the notation in (1)

$$k^2 = \frac{\mu}{r^3}, \quad \text{where } \mu - \text{const}, \quad r^3 - \text{const}. \quad (2)$$

and apply the Poincaré small parameter method. To reduce the volume of the article, we will take the following steps:

1. The sequence of introducing series in degrees of small parameter with accuracy $O(v^2)$ including and obtaining the corresponding systems of differential equations (1) will be performed according to the recommendations of M.I. Bat and others [3, p. 379].

In the problem there are two circular frequencies: k^2 - the circular frequency of the unperturbed motion; $p^2 = k^2 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2$ - the circular frequency of the perturbed motion, where α_1 and α_2 - the parameters determined from the condition for discarding resonant terms in particular solutions of systems of differential equations (1).

2. Everything related to the integration of linear homogeneous and linear inhomogeneous second-order differential equations with constant coefficients will be fulfilled in accordance with the well-known general theory (see textbooks on differential equations).

Completing p.1, we have a system of second-order differential equations with constant coefficients, the solutions of which with an accuracy $O(v^2)$ inclusive, will be given by segments of series in powers of small parameter:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + vx_1 + v^2x_2 + O(v^3), \\ y &= y_0 + vy_1 + v^2y_2 + O(v^3). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Thus, we have a system of differential equations corresponding to the first equation in (1):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_0 + p^2\ddot{x}_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + p^2\ddot{x}_1 &= \alpha_1x_0 + x_0^3, \\ \ddot{x}_2 + p^2\ddot{x}_2 &= \alpha_1x_1 + \alpha_2x_0 + 3x_0^2x_1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

and corresponding to the second equation of (1):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_0 + p^2\ddot{y}_0 &= 0, \\ \ddot{y}_1 + p^2\ddot{y}_1 &= \alpha_1y_0 + y_0^3, \\ \ddot{y}_2 + p^2\ddot{y}_2 &= \alpha_1y_1 + \alpha_2y_0 + 3y_0^2y_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

We integrate (4) and (5) under the following initial conditions:

$$\left. \begin{aligned} t = 0, \quad x_0(0) = a, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \\ y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = ap, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

In accordance with p.1 and p.2, for the first equations from (4) and (5), taking into account (6), we have the zero approximation

$$x_0 = a \cos pt, \quad y_0 = a \sin pt, \quad (7)$$

where a – the radius of the unperturbed circular orbit, which corresponds to $v = 0$.

The solution of the second equations from (4) and (5) with regard for (6) has the form:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{3a^3}{32p^2} \right) \cdot (\cos pt - \cos 3pt), \\ y_1 &= \left(\frac{3a^3}{32p^2} \right) \cdot (\sin 3pt - \sin pt), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Here it is taken into account that

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos pt, \quad x_0^3 = a^3 \left(\frac{3}{4} \cos pt + \frac{1}{4} \cos 3pt \right), \\ y_0 &= a \sin pt, \quad y_0^3 = a^3 \left(\frac{3}{4} \sin pt - \frac{1}{4} \sin 3pt \right), \end{aligned}$$

and that the non-resonance condition of the first approximation gives:

$$\alpha_1 = -\frac{3}{4}a^2$$

The solution of the third equations from (4) and (5) under the initial conditions (6) has the form:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{9a^5}{3072p^2}(\cos 5pt - \cos pt), \\ y_2 &= \frac{9a^5}{512p^2}\left(\frac{13}{6}\sin pt - \sin 3pt + \frac{1}{6}\sin 5pt\right), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Here it is taken into account that

$$\begin{aligned} 3y_0^2 y_1 &= 3(a \sin pt)^2 \cdot \left(\frac{3a^3}{32p^2}\right) \cdot (\sin 3pt - \sin pt), \\ 3x_0^2 x_1 &= 3(a \cos pt)^2 \cdot \left(\frac{3a^3}{32p^2}\right) \cdot (\cos pt - \cos 3pt), \end{aligned}$$

and that the non-resonance condition of the second approximation gives

$$\alpha_1 = \alpha_{2x} = \frac{9}{128} \cdot \frac{a^4}{p^2}, \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{2y} = \frac{-27}{128} \cdot \frac{a^4}{p^2}, \quad (11)$$

Here it affects $x_0(0) = a$, $y_0(0) = 0$.

Recalling that

$$p^2 = k^2 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2$$

we have for the third equation in (4)

$$p^2 = k^2 + v\left(\frac{3}{4}a^2\right) + v^2\left(\frac{9}{128} \cdot \frac{a^4}{p^2}\right)$$

and accordingly for the third equation in (5)

$$p^2 = k^2 + v\left(\frac{3}{4}a^2\right) - v^2\left(\frac{27}{128} \cdot \frac{a^4}{p^2}\right),$$

Notably they have the same order of smallness $O(v^2)$, Since v is sufficiently small, we have $O(v^2) \approx O(3v^2)$.

Now we substitute in (3) x_0, y_0 from (7), x_1 and y_1 from (8), x_2 and y_2 from (9) and find

$$\begin{aligned} x &= a \cos pt + v\left(\frac{3a^3}{32p^2}\right) \cdot (\cos pt - \cos 3pt) + v^2\left(\frac{9a^5}{3072p^2}\right) \cdot (\cos 5pt - \cos pt), \\ y &= a \sin pt + v\left(\frac{3a^3}{32p^2}\right) \cdot (\sin 3pt - \sin pt) + v^2\left(\frac{9a^5}{512p^2}\right) \cdot \left(\frac{13}{6}\sin pt - \sin 3pt + \frac{1}{6}\sin 5pt\right). \end{aligned} \quad (12)$$

According to the formula

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (13)$$

It is possible to obtain the radius of the perturbed circular orbit

$$\rho = a \left\{ 1 + v \left(\frac{3a^2}{64p^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2pt - 2 \cos 4pt \right) \right\} + O(v^3). \quad (14)$$

At $t = 0$, $\rho = a$, then we find ρ^{\min} and ρ^{\max} . For this we calculate $\dot{\rho}$ and equate it to zero

$$3p \sin 2pt - 8p \sin 4pt = 0. \quad (15)$$

Let us find the critical points. Before we make a replacement

$$2pt = \tau, \quad 4pt = 2\tau,$$

then (15) will have the form

$$3 \sin \tau - 8 \sin 2\tau = 0 \quad (16)$$

or taking into account

$$\sin 2\tau = 2 \sin \tau \cos \tau \quad (17)$$

We have (17) instead of (16)

$$\sin \tau_1 (3 - 16 \cos \tau_2) = 0, \quad \tau_1 = 0^0, \quad \tau_2 = 79,2^0.$$

Now we need to check the critical points τ_1 and τ_2 , considering $p - \text{const}$

-1^0	0^0	5^0
0,017	0	0,087
-	+	
min		

70^0	$79,2^0$	$90,1^0$
0,3420	0,1874	-0,002
+		-
max		

The first critical point gives «min»

$$\tau_1 = 0, \quad t_1 = 0, \quad \rho^{\min} = a.$$

The second critical point gives «max»

$$\tau_2 = 79 \frac{1}{5} = \left(\frac{396}{5} \right)^0, \quad \text{that corresponds to } t_2 = \frac{\tau_2}{2p} = \left(\frac{396}{10p} \right)^0;$$

$$\rho^{\max} = a \left\{ 1 + v \left(\frac{3a^2}{64p^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \tau_2 - 2 \cos 2\tau_2 \right) \right\} = a \left\{ 1 + v \left(\frac{a^2}{8p^2} \right) \right\}.$$

Thus, ρ on the segment $0 \leq \tau \leq \tau_2$ runs through all values of segment

$$a \leq \rho \leq a \left[1 + v \left(\frac{a^2}{8p^2} \right) \right].$$

The maximum of the radius of the perturbed circular orbit in time corresponds to $t_2 = \frac{\tau_2}{2p}$, and minimum - $t_0 = 0$.

It is seen from (14) that the perturbed radius consists of the sum of the evolutionary part of the radius a and oscillations with a very small amplitude $v \left(\frac{3a^3}{64p^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2pt - 2 \cos 4pt \right)$.

It may be affirmed, that the depicting point under the condition $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2pt - 2 \cos 4pt = 0$ intersects a circle of the radius a , then under condition

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2pt - 2 \cos 4pt > 0$$

The representing point will be outside the evolutionary circle, and at fulfillment of the conditions

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2pt - 2 \cos 4pt < 0$$

will be inside this circle. Besides, the amplitude of deviations of the depicting point from the evolutionary circle will be different at each moment of time, it varies continuously.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шинибаев М.Д. Поступательные движения пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения.- Алматы: РИО ВАК РК, 2001.- 128 с.
 [2] Шинибаев М.Д., Дайырбеков С.С., Жолдасов С.А. Метод вариации произвольных постоянных в теории движения ИСЗ.- Palmarium Academic Publishing. Saarbrücken.- Deutschland.-2016, 113 с.
 [3] Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах.- М.: Наука, 1973.- Т.3.- 488 с.

REFERENCES

- [1] Shinibaev M.D. Postupatelnye dvizhenij passivno gravitiruyoushego tela v centralnom i necentralnom pole taygotenia.- Almaty: RIO VAK RK, 2001.- 128 s. (in Russ).
 [2] Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A. Metod variacii proisvolnyh postojnyh v teorii dvizheniy ISZ.- Palmarium Academic Publishing. Saarbrücken.- Deutschland.-2016, 113 s. (in Russ).
 [3] Bat M.I., Dganolidze G.J., Kelson A.S. Teoreticheskaj mehanika v primerah I zadachah.- M.: Nauka, 1973.-T.3.- 488 s. (in Russ).

ӘОЖ: 531.1+629.195

**М.Д. Шыныбаев¹, А.А. Беков¹, Б.Н. Рахимжанов¹, С.Б. Момынов¹,
 А.Ж. Сәдібек², С.С. Даиырбеков², С.А. Жолдасов²**

¹Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы, Алматы қ., Қазақстан;

²Сыр-Дария университеті, Жетысай қ., Қазақстан

ХИЛДЫҢ ЕКІНШІ ЕСЕБІНДЕГІ ҰЙЫТҚУЛЫ ШЕҢБЕР ТИПТЕС ОРБИТАЛАР

Аннотация. Хилдың екінші орталық орбитасы Жер серігінің қозғалыс теориясында қолданылып жатыр [1, б. 3].

Осы күнге дейін кіші параметр әдісі Хилдың орталық орбитасын зерттеуде қолданылмайды. Бұл әдіс туралы мынандай қорытынды берілген [2, б. 30].

Әдісті қолданғанда төмендегі екі жайытты ұмытпаңдар:

1. Әдіс тек кіші параметрдің өте мардымсыз болғанында сәтті болады.

2. Әр келесі есептеу қадамы алдыңғысынан күрделі болады. Жоғарғы жуықтауларда жұмыс көлемі көбее түседі.

Бұл мақалада 2-ші ескерту кейде орындамайтыны көрсетілген. Себебі есептеу барысында өте мардымсыз сандық коэффициенттер пайда болады да есептеу көлемін күрт қысқартады.

Және көпшіліктің ойы бойынша бұл әдістің ұйытқулы орбиталардың эволюциясына, осцилляциясына ешқандай қатысы жоқ. Бұл ойда қате болып шықты.

Түйін сөздер: Хилдың екінші есебі, ұйытқулы шеңберлік орбита, Пуанкаренің кіші параметрлер әдісі, шеңберлік жиілік, сызықтық емес еркін қозғалыстар, осцилляция, эволюция.

М.Д. Шинибаев¹, А.А.Беков¹, Б.Н.Рахимжанов¹, С.Б. Момынов¹,
А.Ж. Садыбек², С.С. Даиырбеков², С.А. Жолдасов²

¹Национальный центр космических исследований и технологий, г. Алматы, Казахстан;

²Университет Сыр-Дария, г. Джетысай, Казахстан

ВОЗМУЩЕННАЯ ОРБИТА КРУГОВОГО ТИПА ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА

Аннотация. Известно, что вторая промежуточная орбита Хилла нашла приложения в теории движения спутников Земли [1, с.3]. Метод малого параметра еще не был использован при исследовании второй промежуточной орбиты Хилла. Этому методу в [2, с.30] дается следующая характеристика:

«Метод построения периодических решений нелинейных автономных систем, предложенный Анри Пуанкаре, обладает двумя особенностями, которые надо иметь в виду при практическом использовании:

1. Процедура эффективна только при построении периодических решений слабонелинейных систем, так как μ – мало.

2. Построение каждого следующего приближения становится сложнее первого. Объем работ с каждым приближением растет лавинообразно».

Конечно, в общем случае эти предупреждения верны.

В данной статье показано, что при решении нелинейных дифференциальных уравнений возмущенной круговой задачи Хилла пункт 2 становится несостоятельным.

Причина состоит в том, что в решениях второго приближения появляются числовые коэффициенты, которые имеют малый порядок, что резко сокращает объем вычислений.

Бытует мнение, что метод малого параметра Пуанкаре никак не характеризует эволюцию и осцилляцию возмущенных орбит.

Это мнение тоже оказалось неверным.

Ключевые слова: вторая задача Хилла, возмущенная круговая орбита, метод малого параметра Пуанкаре, круговая частота, свободные нелинейные колебания, осцилляция, эволюция.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 75 – 80

UDC 536.46:532.517.4

**A.S. Askarova, S.A. Bolegenova, S.A. Bolegenova, Maximov V.Yu.,
A.M. Maxutkhanova, A.G. Turbekova, Kh.I. Beisenov**

Al-Farabi kazakh national university, Almaty
Bolegenova.symbat@kaznu.kz

**A COMPUTATIONAL EXPERIMENT FOR STUDYING
THE COMBUSTION OF THERMOCHEMICALLY-GASIFIED COAL
IN THE COMBUSTION CHAMBER OF THE BOILER BKZ-160**

Annotation. Research in the field of advanced technological processes to improve the combustion of pulverized coal and the use of alternative methods of combustion of various fuels are currently the most relevant to the entire energy complex of the Republic of Kazakhstan.

The main direction of improvement of pulverized coal combustion and utilization of alternative fuels types are the implementation of stringent ecological requirements in terms of specific emissions of harmful substances with exhaust gases of boilers. And at this stage, the creation of technologies that describe the main processes of formation of harmful dust-gas emissions, and development of recommendations for their reduction is a first task for researchers.

At the modern stage development of industry of the Republic of Kazakhstan there is a question about improving the efficiency of processes related to energy production, subject to strict norms of emission of harmful substances and efficient use of equipment. One of the perspective solutions in this area is thermo-chemical activation of low-grade solid fuels with using plasma-fuel systems (PFS).

Keywords: combustion chamber, boiler, burners, solid fuel, high-ash coal, numerical simulation, computational experiment.

УДК 536.46:532.517.4

**А.С. Аскарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова, В.Ю. Максимов,
А.М. Максутханова, А.Г. Турбекова, Х.И. Бейсенов**

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы
Bolegenova.symbat@kaznu.kz

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ
ГОРЕНИЯ ТЕРМОХИМИЧЕСКИ-ГАЗИФИЦИРОВАННОГО УГЛЯ
В ТОПОЧНОЙ КАМЕРЕ КОТЛА БКЗ-160**

Аннотация. Исследования в области прогрессивных технологических процессов по совершенствованию установок сжигания пылеугольного топлива и использованию альтернативных методов сжигания различных видов топлива являются в настоящее время наиболее актуальными для всего энергетического комплекса Республики Казахстан.

Основным направлением совершенствования пылеугольного горения и использования альтернативных видов топлива является выполнение жестких экологических требований по удельным выбросам вредных веществ с отработанными газами котельных установок. И на этом этапе создание технологий, позволяющих описать основные процессы формирования вредных пылегазовых выбросов, и разработка рекомендаций по их снижению является актуальной задачей исследователей.

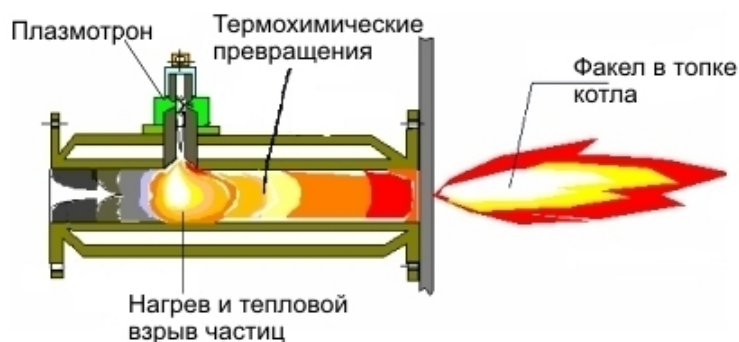
На современном этапе развитие промышленности Республики Казахстан очень остро встает вопрос о повышении эффективности процессов, связанных с производством энергии, при соблюдении строгих норм выброса вредных веществ и экономичным использованием оборудования. Одно из перспективных решений в данной области является термохимическая активация низкосортных твердых топлив при помощи плазменно-топливных систем (ПТС).

Ключевые слова: Топочная камера, котел, горелки, твердое топливо, высокозольный уголь, численное моделирование, вычислительный эксперимент.

Реализация новых технологий термохимической активации пылеугольных потоков определяется в конечном итоге уровнем разработки методов расчета соответствующих физико-химических процессов, протекающих при горении твердого топлива, прошедшего плазменную обработку. Разработка метода расчета таких течений тесно связана с расчетно-теоретическими и экспериментальными исследованиями теплофизических процессов движения и нагрева частиц топлива, термохимических процессов в плазмотронах и их последующих превращений в топочном пространстве. Проведение вычислительных экспериментов при помощи новейших информационных технологий моделирования позволили, в рамках данного проекта, при хорошо развитом алгоритмическом и программном обеспечении, используя соответствующие модели, провести комплексные исследования влияния плазменной активации угля на процессы формирования вредных веществ в техногенных газах.

Термохимическая подготовка пылеугольного топлива к сжиганию реализована исполнителями проекта в соответствии со следующим механизмом. Аэросмесь подается через пылепровод к горелке. Аэросмесь подается в горячую топочную камеру с температурой $T \sim 350\text{K}$, в которой она нагревается и воспламеняется. При оснащении горелочного устройства плазмотроном, аэросмесь нагревается плазменным факелом в объеме горелки еще до выхода в топочную камеру. При прохождении угольной пыли с воздухом через плазмотрон, то из него выделяются летучие вещества и газифицируется коксовый остаток, после чего они начинают окисляться кислородом первичного воздуха аэросмеси, что приводит к дополнительному нагреву реагирующего потока аэросмеси. При этом углерод газифицируется до CO , а не до CO_2 , благодаря существующему коэффициенту избытка воздуха в аэросмеси (0,3-0,5 от стехиометрического соотношения).

В результате на выходе из горелочного устройства, оборудованном плазменно-топливной системой образуется высокотемпературный реагирующий поток углеродсодержащих частиц и газообразных продуктов плазменной термохимической подготовки аэросмеси с температурой $\sim 1300\text{K}$. При этом, независимо от того, что в качестве топлива используется высокозольный уголь, получается высокорекреационное двухкомпонентное топливо. Перемешиваясь с вторичным воздухом в топочной камере, это топливо интенсивно воспламеняется и устойчиво горит без мазута или газа, часто используемых для воспламенения и стабилизации горения низкосортных пылеугольных потоков при обычном горении.



За время выполнения работ было проведено системное исследование горения различных углей в широком диапазоне параметров, определяющих условия и режимы сжигания твердого топлива в топочных камерах ПК-39 Аксуйской ГРЭС и БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ.

Проведение вычислительных экспериментов по сжиганию в топочных камерах котлов ПК-39 и БКЗ-160 низкосортных казахстанских углей, прошедших предварительно термохимическую

плазменную подготовку в ПТС, позволили определить режимные параметры и получить оптимальные характеристики реализации плазмохимической технологии термохимической подготовки низкосортных высокозольных казахстанских углей к сжиганию на реальных энергетических объектах Республики Казахстан.

В широком диапазоне параметров описан процесс формирования продуктов реакции горения, в том числе вредных (NO , NO_2 , CO , CO_2 и др.), проведено исследование влияния вида используемого угольного топлива и способа его сжигания в камерах сгорания. Получены трехмерные поля температуры, скорости и концентраций и исследованы закономерности их формирования и изменения в во всем объеме исследуемых топочных камер. Исследован процесс образования вредных пылегазовых выбросов в зависимости от условий организации процесса горения в топочных камерах ТЭС.

Для топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС были смоделированы: традиционный режим без использования низкотемпературной плазмы и три режима горения, когда низкотемпературная плазма воздействует на:

- 1) пылеугольный поток в четырех угловых горелках нижнего яруса;
- 2) пылеугольный поток из шести горелок нижнего яруса;
- 3) пылеугольный поток в двенадцати горелках двух ярусов.

Для топочной камеры котла БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ проведено исследование традиционного горения угля и горения термохимически газифицированного угля.

В случае с внедренными плазменно-топливными системами, образующийся факел вносит существенную неоднородность в аэродинамику течения (рисунок 1), что сказывается также и на распределении температуры в объеме топочной камеры (рисунок 2).

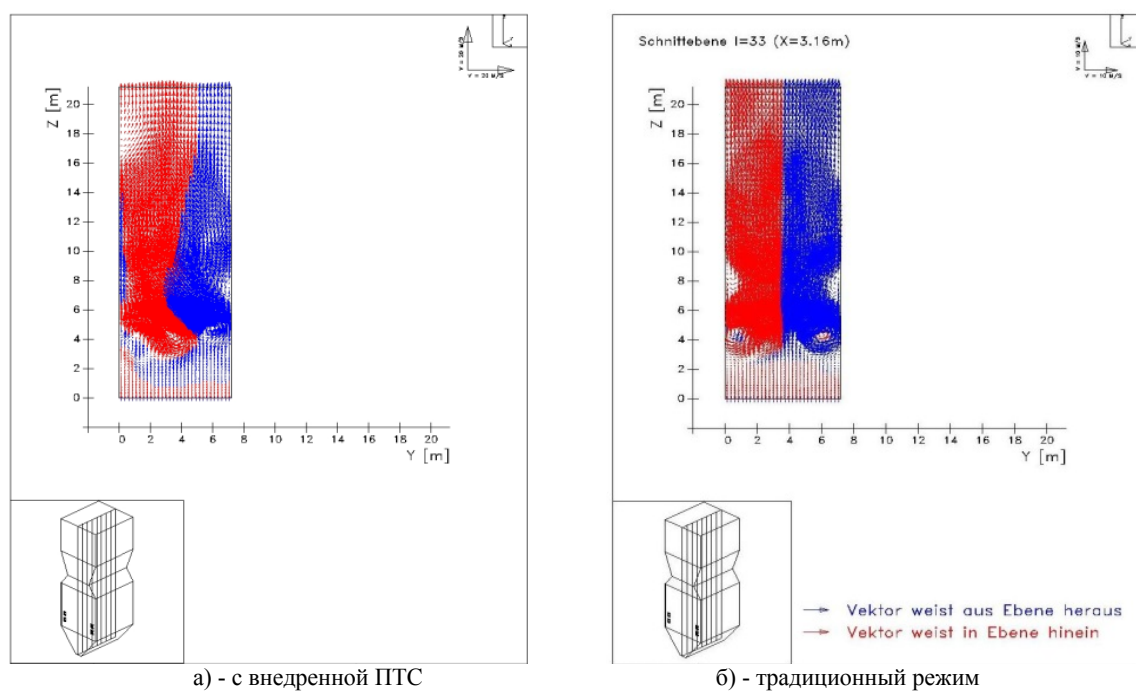


Рисунок 1 - Распределение вектора полной скорости в продольном сечении топочной камеры котла БКЗ-160, Алматинской ТЭЦ

На рисунке 2 показано, что максимальное значение температура достигает в обоих случаях в центральном сечении топочной камеры. Однако характер распределения температуры различен. Характер распределения температуры в топочной камере, в первую очередь, вносит изменение на процессы образования продуктов горения пылеугольного факела, в том числе и на вредные вещества (NO , CO , CO_2 и др.).

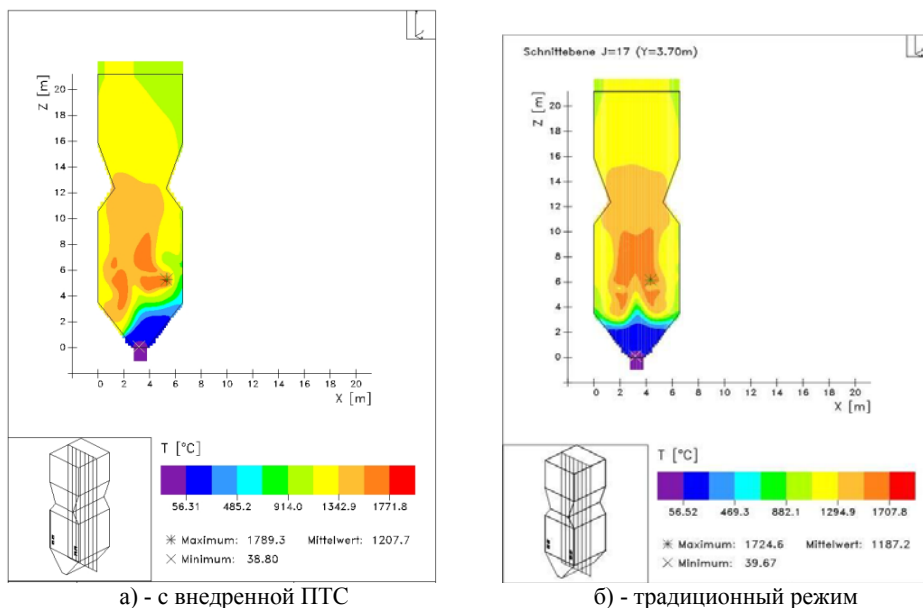


Рисунок 2 - Распределение температуры в продольном сечении топочной камеры котла БКЗ-160, Алматинской ТЭЦ

Внедрение ПТС практически никак не отражается на концентрацию углекислого газа в топочной камере БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ. В обоих случаях на выходе имеем концентрацию CO_2 равную 0.189 кг/кг.

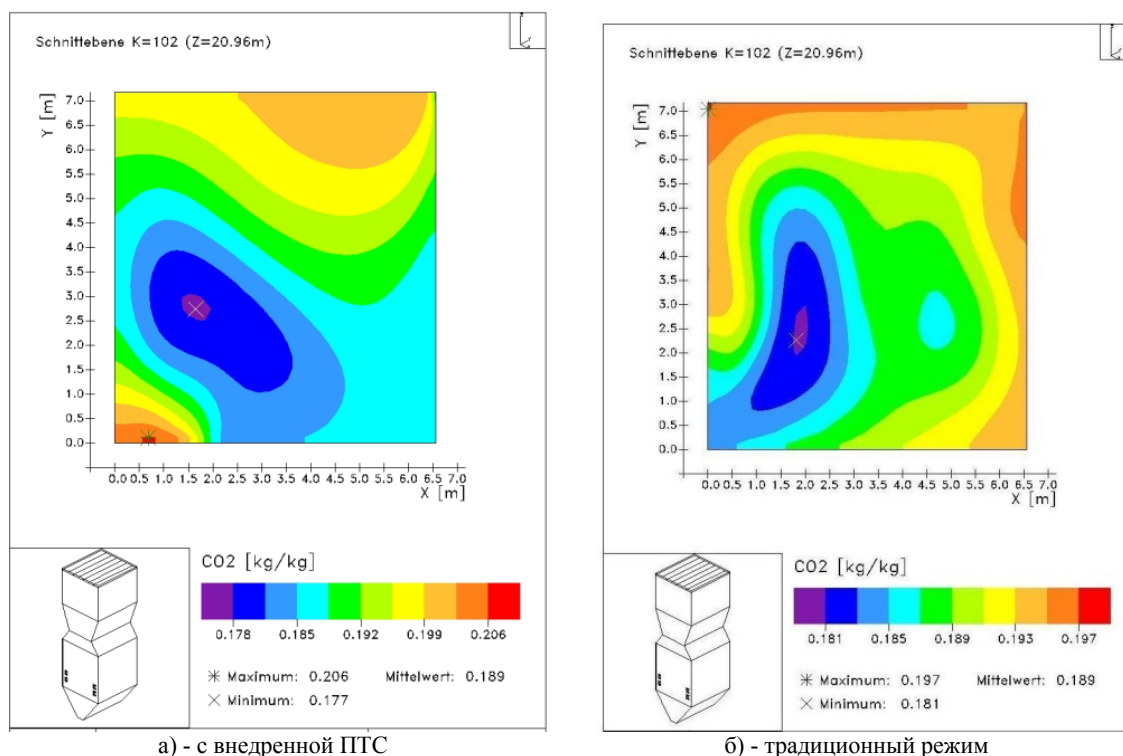


Рисунок 3 - Распределение углекислого газа на выходе из топочной камеры котла БКЗ-160, Алматинской ТЭЦ

При рассмотрении образования NO_x наблюдается существенное различие.

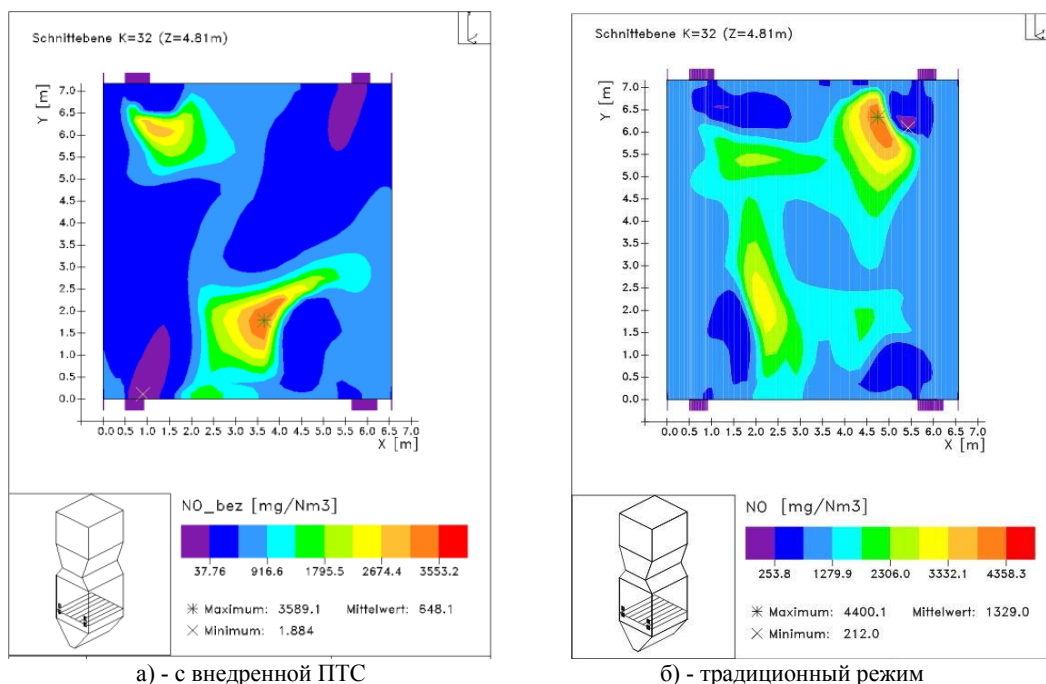


Рисунок 4 - Распределение окиси азота в сечении нижнего яруса топочной камеры котла БКЗ-160, Алматинской ТЭЦ

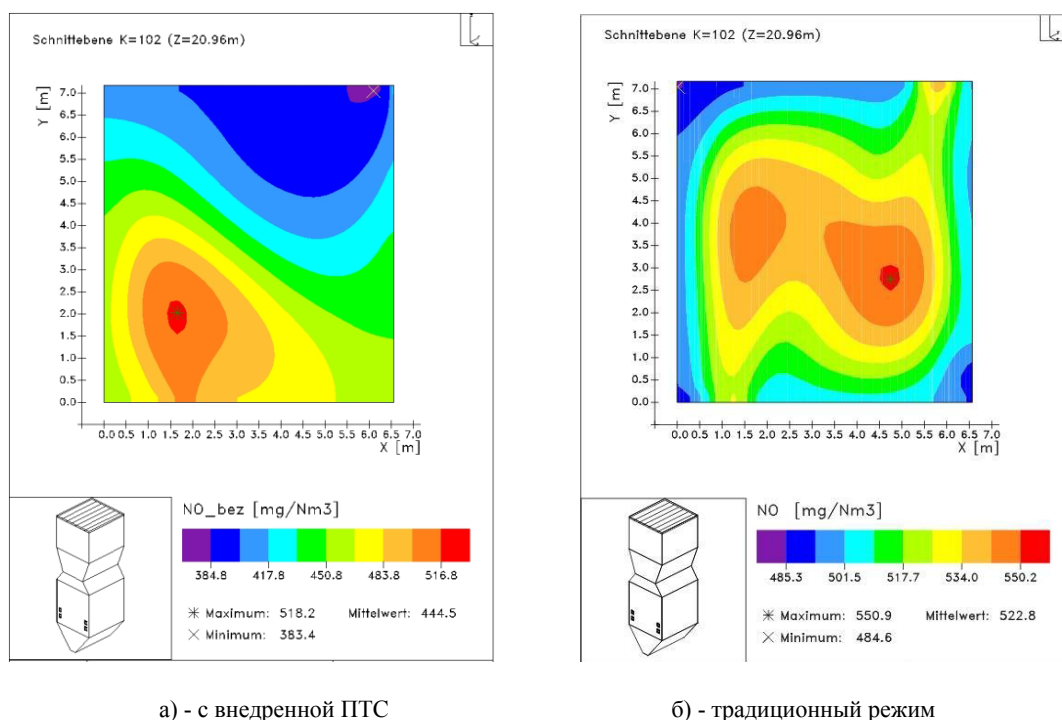


Рисунок 5 - Распределение окиси азота на выходе из топочной камеры котла БКЗ-160, Алматинской ТЭЦ

Из представленных рисунков видно, что концентрация окиси азота как в поясе горелок так и на выходе из топочной камеры БКЗ-160 Алматинской ТЭЦ в случае использования ПТС существенно меньше, чем при традиционном сжигании, что говорит о целесообразности использования данной технологии с целью снижения вредных пылегазовых выбросов в атмосферу Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Askarova A., Bolegenova S., Beketaeva M. Calculation of dryness of vapor at the end of the evaporator surface contour of a steam boiler with natural circulation // Materials of International Conference "Science: Integrating Theory and Practice". ICET, Bozeman, MT, USA. 2014. 106-109.

[2] Askarova A., Bolegenova S., Bekmukhamet A., Maximov V., Beketayeva M., Ospanova Sh. Gabitova Z.K. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber //

WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer.– 2014. 9. – P.39-50.

[3] Askarova A.S., S.Bolegenova, V.Maximov, A.Bekmukhamet, M.Beketayeva Numerical simulation of turbulent flows in combustion chamber // Recent Researches in Mechanical Engineering, ISBN: 978-1-61804-153-1, pp. 161-166, Milan, Italy, 2013.

[4] Аскарова А.С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекмухамет А., Оспанова Ш.С. Исследование образования вредных веществ в камере сгорания БКЗ-75 Шахтинской ТЭЦ // Труды 8 Всероссийской конференции с международным участием "Горение твердого топлива". Россия, Новосибирск, 2012.- С.9.1-9.4.

REFERENCES

[1] Askarova A., Bolegenova S., Beketaeva M. Calculation of dryness of vapor at the end of the evaporator surface contour of a steam boiler with natural circulation. *Materials of International Conference "Science: Integrating Theory and Practice"*. ICET, Bozeman, MT, USA. 2014. 106-109.

[2] Askarova A., Bolegenova S., Bekmukhamet A., Maximov V., Beketayeva M., Ospanova Sh. Gabitova Z.K. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber.

WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer. 2014. 9. 39-50.

[3] Askarova A.S., S.Bolegenova, V.Maximov, A.Bekmukhamet, M.Beketayeva Numerical simulation of turbulent flows in combustion chamber. *Recent Researches in Mechanical Engineering*. Milan, Italy. 2013. 161-166.

[4] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Bekmukhamet A., Ospanova Sh.S. Study the formation of harmful substances in the combustion chamber BKZ-75 Shakhtinskaya CHP. *8 Proceedings of All-Russian conference with international participation "The burning of solid fuels."* Russia, Novosibirsk, 2012.- S.9.1-9.4.

**А.С. Асқарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова, В.Ю. Максимов,
А.М. Максұтханова, А.Г. Турбекова, Х.И. Бейсенов**

Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қаласы.

**БКЗ-160 ЖАНУ КАМЕРАСЫНДАҒЫ ТЕРМОХИМИЯЛЫҚ-ГАЗДАНДЫРЫЛҒАН
КӨМІР ЖАНУЫН ЗЕТТЕУДІҢ ЕСЕПТЕУ ЭКСПЕРИМЕНТІ**

Аннотация. Шаңкөмірлі отынды жағу қондырғыларын жетілдіру бойынша, ілгерілемелі технологиялық процестер саласында зерттеу жүргізу және әртүрлі отын түрлерін жағудың баламалы әдістері қазіргі уақытта Қазақстан Республикасының барлық энергетикалық кешені үшін өзекті болып табылады.

Шаңкөмірлі отынды жағуды жетілдірудің негізгі бағыты және отынның баламалы түрлерін қолдану, қазандық қондырғыларынан шыққан газбен өңделген зиянды заттардың меншікті шығарындылары бойынша, қатаң экологиялық талаптарын орындау болып табылады.

Зиянды шаңгазды шығарындыларды қалыптастырудың негізгі процестерін сипаттауға мүмкіндік беретін технологияларды құру кезеңінде, оларды төмендету бойынша ұсыныстарды жасау зерттеушілер үшін өзекті мәселе болып отыр.

Қазақстан Республикасының өнеркәсіптерінің заманауи даму кезеңінде, қондырғыларды үнемді пайдаланумен қатар, зиянды заттардың шығарындыларының қатаң нормаларын сақтау барысында энергия шығарумен байланысты процестердің эффективтілігін көтеру туралы сұрақтар алдыңғы қатарда тұр.

Бұл салада перспективалы шешімдердің бірі, плазмалық-отынды жүйе (ПОЖ) көмегімен төменгі сұрыпты қатты отындарды термохимиялық белсендіру.

Тірек сөздер: Жану камерасы, қазандық, жанарғы, күлділігі жоғары көмір, қатты отын, сандық моделдеу, сандық тәжірибе.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 81 – 86

УДК 372.8

G.I.Salgarayeva, A.Bazarbayeva

Kazakh State Women Teacher Training University, Almaty
aynur555a@gmail.com

STEAM SYSTEM IN EDUCATION AND ROBOTICS

Annotation. This article is written about STEAM system, its definition, appearance and the benefits of this system. Also, the question is raised about what robotics, robotics teaching goals and describes the current situation of robotics in Kazakhstan. STEAM system is an innovation that is conquering the whole world. It is possible that in the future all areas of education will work on this system. Because learning objects much better not to be limited in theory of knowledge, as well as the consolidation of knowledge in practice in the process of development and modernization projects, linking them with other objects. So now a lot of attention in learning should be paid to integrated education. Integral training helps people develop technical creativity, critical thinking, ability to work in groups, refer to the work with responsibility and interest. The information about the term "robot", the facts in the field of robotics and teaching benefits of robotics as a subject is given. If we consider robotics as an element of STEAM system, pupils and students will not spend much time at their desks, will be in the process of working on their projects, programming, testing and updating. Given this fact, it can be ensured that the lessons will be interesting for pupils and students.

Key words: STEAM system, education, integral education, robotics, technology education, technological creativity.

Г.И. Салғараева, А. Базарбаева

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

БІЛІМ БЕРУДЕГІ STEAM ЖҮЙЕСІ ЖӘНЕ РОБОТОТЕХНИКА

Аннотация. Мақалада STEAM жүйесі туралы, анықтамасы және шығуы жайлы, осы жүйенің артықшылықтары жайлы жазылған. Сонымен қатар, робототехника деген не, робототехника пәнінің оқытудағы міндеті, Қазақстандағы робототехниканың қазіргі жағдайы туралы жалпы мәлімет келтірілген. STEAM жүйесі бүкіл әлемді жаулап келе жатқан инновация болып табылады. Келешекте барлық білім беру салалары осы жүйемен жұмыс жасауы әбден мүмкін. Өйткені, пәндерді оқыту барысында теориялық біліммен ғана шектелмей, меңгерген теориялық білімді басқа да пәндермен ұштастыра отырып практика жүзінде, жобаларды жасау және модернизациялау барысында қолдану және бекіту әлдеқайда тиімді болып келеді. Сондықтан, адамдарды оқыту барысында интегралды оқытуға аса көп көңіл бөлу керек. Интегралды оқыту арқылы адамдардың техникалық шығармашылығын, сыни тұрғыдан ойлау қабілетін, топпен жұмыс жасауға, жұмысқа қызуғылықпен және жауапкершілікпен қарауға үйретеді. «Робот» терминінің тарихы, робототехника пәні саласындағы фактілер, осы пәнді оқыту артықшылығы мен пайдасы жайлы жазылған. STEAM жүйесінің элементі ретіндегі робототехниканың қызықтырарлығы, оқушылар мен студенттер оқу барысында уақыттын көп бөлігін партада емес, өз жобаларын жасау, программалау, тестілеу, жаңарту үстінде болады. Осы фактіні ескерсек, сабақ оқушыларға және студенттерге тиімді және қызықты болып өтуіне кепіл.

Түйін сөздер: STEAM жүйесі, білім беру, пән, интегралды оқыту, робототехника, ғылыми-техникалық білім, технологиялық шығармашылық.

Біздің қоғамда, білім беру жүйесінде де заман талаптарына сай өзгерістер болып жатады. Кеңес Одағы кезеңінде білім беруде оқушының хоббиі, бір пәнге деген талпынысы және

қызығушылығы сияқты фактілер ескерілмеді десек болады. XX ғасырда мектеп тек жоғары мектепке түсуге қажет білімі бар теоретиктерді даярлады, ал XXI ғасырда жағдай түбінен өзгерді. Педагогикалық процессте оқушының қызығушылығын оятып, білімге талпынысын ашуға, өз бетімен ізденуге, гипотеза ұсынып, анализ жасап, қорытынды шығаруға бағытталған әдістемелер пайда бола бастады [1][2].

Қазіргі күнде көптеген елдерде STEAM-жүйесі түрлі білім беру бағдарламаларына енгізіліп жатыр, STEAM-орталықтары құрылуда, осы бағытта халықаралық конференциялар өткізілуде.

STEAM-жүйесінің акронимымен танысатын болсақ. «STEM» аббревиатурасын алғаш рет америкалық бактериолог Р.Колвэлл 1990 жылдары ұсынды, бірақ ол тек 2000 жылдарда әйгілі бола бастады. STEM негізінде бұл терминнің жаңа нұсқалары пайда бола бастады, солардың ішінде ең кең таралғаны STEAM (ғылым, технологиялар, инженерия, өнер және математика) және STREAM (ғылым, технологиялар, робототехника, инженерия және математика) болды. Қазіргі кезде STEM әлемдік білім берудегі басты трендтерінің бірі болып табылады [3][4].

Яғни, STEAM-білім беру жүйесі – жақсы даярланған кадрлармен қамтамасыздандырылуына, жаңа технологиялардың, инновациялық ой-сананың дамуына бағытталған ғылымдардың бірігуі.

Осы оқыту әдісінің қандай артықшылықтары бар және неліктен ол Америка, Солтүстік және Батыс Еуропада өте танымал болды?

STEAM-жүйесінің артықшылықтарына тоқталатын болсақ:

✓ **Пән емес, «тақырып» бойынша интегралды оқыту.**

STEAM-оқыту жүйесі өзінде пәнаралық және жобалық жағынан оқыту түрін қарастырады, оның негізінде жаратылыстану ғылымдарының, технологияның, инженерлік істің, өнердің, математиканың интеграциясы жатыр. Ғылымды, технологияларды, инженерлік істі, өнерді және математиканы интегралды түрде оқыту өте маңызды, өйткені практикада бұл салалар тығыз байланысқан [5].

✓ **Ғылыми-техникалық білімді өмірде қолданылуы.**

STEAM-білім беру жүйесі практикалық сабақтардың көмегімен оқушылар мен студенттерге ғылыми-техникалық білімді өмірде қолдануды үйретеді. Әр сабақта олар заманауи индустрияның жобаларын құрады, жобалайды және дамытады. Олар шын жобаны зерттейді, нәтижесінде өз қолдарымен шын жобаның прототипін құрады. Мысалға, жас инженерлер зымыран жасау барысында қысым, инженерлік дизайн, координаталық ось, траектория, үйкеліс күші, ұшу бұрышы ұғымдарымен танысады.

✓ **Өз күшіне деген сенімділіктің артуы.**

Оқушылар мен студенттер түрлі жобаларды жасай отырып, көпірлер мен жолдар салу барысында, машиналар мен аэропандарды жүргізген кезде, роботтар мен электронды ойындарды тестілеген кезде, жер асты және ауа конструкцияларын жасау барысында өздерінің ой-саналарын және талпыныстарын күшейте түседі. Соңында, өз күштерімен барлық мәселелерді шешіп, мақсаттарына жетеді. Балалар үшін бұл – шабыт, жеңіс, адреналин және қуаныш.

✓ **Белсенді коммуникация және топтық жұмыс.**

STEAM-жүйесі өзінің белсенді коммуникация және топтық жұмысымен ерекшеленеді. Уақыттың көп бөлігін оқушылар партада өткізбейді, олар өз конструкцияларын тестілейді және дамытады. Олар әрдайым жетекшілерімен және топтың басқа да мүшелерімен араласып тұрады. Балалар процеске белсенді қатысқан кезде сабақты жақсы меңгереді [6].

✓ **Сыни ойлау мен проблемаларды шешу дағдыларын дамыту.**

STEAM бағдарламалары балалар өміріндегі тап болуы мүмкін қиындықтарды жеңу үшін қажет сыни ойлау және проблемасын шешу дағдыларын дамытады. Мысалы, студенттер жоғары жылдамдықты машиналар салады, содан кейін оларды тексереді. Бірінші сынақтан кейін олар автокөлік мәреге қандай себептермен жеткен жоқ айқындайды. Мүмкін алдыңғы бөліктің дизайны, дөңгелектер арасындағы қашықтық, аэродинамика немесе бастау күші әсер етті ме? Әрбір тесттен кейін (старт) олар мақсатқа жету үшін дизайды жақсартады.

✓ **Жобаларға шығармашылық және инновациялық көзқарас.**

STEAM оқыту алты кезеңнен тұрады: сұрақ (міндет), талқылау, жобалау, құру, тестілеу және дамыту. Бұл қадамдар жүйелі жобалық тәсілдің негізі болып табылады. Өз кезегінде, қатар өмір сүру немесе әртүрлі мүмкіндіктерін араластыра пайдалану шығармашылық және инновациялар үшін негіз болып табылады. Осылайша, ғылым мен техниканы бір мезгілде зерттеу және қолдану барысында жаңа инновациялық жобаларды көптеп жасауға болады. Өнер және сәулет қатар болуы үлкен үлгі [6].

✓ **Өмірдің технологиялық инновацияларына балаларды дайындау.**

STEAM бағдарламалар сондай-ақ балаларды технологиялық тұрғыдан дамыған әлемге дайындайды. Өткен 60 жыл ішінде технологиялар өте жақсы дамыды, Интернет (1960) және GPS технологиясының (1978) ашылуынан ДНК сканерлеуіне дейін (1984), сондай-ақ әрине, iPod (2001). Бүгін барлығы дерлік iPhone және басқа смартфондарды пайдалануда. Біздің әлемді бүгін технологияларсыз елестету мүмкін емес болып келеді. Ол сондай-ақ технологиялардың дамуы жалғасады және STEAM дағдылар осы дамуының негізі болып табылатының айтады.

✓ **STEAM мектеп бағдарламасына қосымша ретінде.**

7-14 жас аралығындағы мектеп оқушыларына арналған STEAM бағдарламалары олардың күнделікті сабақтарына қызығушылығын арттыру құралы ретінде қарастылған. Мысалы, физика сабақтарында тартылыс күші жайында тактадағы формуламен білім алса, ал STEAM үйірмелерінде оқушылар парашюттер, зымыран немесе ұшақтар жасау және іске қосу барысында өз білімдерін бекіте алады. Оқушыларға күнделікті өмірде көрмейтін немесе естімейтін терминдерді түсінуге оңай емес. Мысалы, қысым немесе температураның арту аясында көлемнің кенейуі. STEAM сабақтарында қызықты эксперименттер өткізіп осындай терминдерді оңай түсінуге болады. Сол себепті АҚШ-та орта мектептер STEAM-орталықтарымен белсенді жұмыс жасауда [6].

STEAM жүйесінің жаңалығы болып табылатын робототехника пәні аты айтып тұрғандай «роботтармен» байланысты. Сол себепті, алдымен «робот» терминімен таныса кетейік.

Заманауи қоғамда роботтарды күнделікті өмірге ендірілуі жүзеге асырылып жатыр, көптеген процесстер роботтармен алмастырылуда. Роботтарды қолдану салалары әртүрлі: медицина, құрылыс, геодезия, метеорология және т.б. Адамның өміріндегі көптеген процесстерді роботтарсыз елестету мүмкін емес (мобильді роботтар): күтүші робот, бала қараушы робот, үй жинайтын робот және т.б.

Жалпы айтқанда, робот – бұл механикалық іс-әрекеттерді орындайтын әмбебап автомат. Олардың ерекшелігіне орындалып жатқан операциядан оперативті түрде басқа операцияға көшу болып табылады. Роботтардың бірнеше түрі болады және әрқайсысының өз анықтамасы болады. Көбінесе үш түрлі роботтар жайлы айтылады, олар: өндірістік роботтар, адаптивті роботтар және жасанды интеллекті бар роботтар немесе интегралды [7].

Өзінің атымен «роботтар» кибернетиктер немесе инженерлерге емес, жазушыларға алғыс айтулары қажет. «Робот» сөзің алғаш рет ойлап тапқан адам – әйгілі чех драматург-жазушысы Карел Чапек [8].

30-шы жылдардың басында Чапек «RUR» атты пьесаны жазады. Сол пьесаның кейіпкері инженер Росс адамның барлық жұмысын атқаратын күрделі машинаны ойлап табады. Сол адам тектес машинаны «робот» деп атайды. Росстың жаңалығы бірден капиталисттердің назарына ілінді және солардың арқасында роботтар жасайтын арнайы фирмалар құрылды. Олар адамдарға өте ұқсас болған және барлық жұмысты істей алатын еді. Роботтарға деген сұраныстың өсуі фабрика мен зауыттарда адамдарды роботтармен алмастырылуына алып келді. Бірақ капиталисттердің қуанышы ұзаққа созылмады. Бір күні роботтар көтеріліске шығып, адамдар жер бетінен жойылды, ал олардың орнын роботтар басты... [9].

Роботтар жайлы бірінші пьесаның ширатылуы адамдардың ойларында біраз уақытқа дейін жағымсыз ой қалдырды. Дегенмен, техника дамуын тоқтатпады, ал адамдар эмоцияларына қарамай роботтарды құрды.

«Робот» сөзінің авторы Карел Чапек болса, «робототехника» сөзінің («робототехника» емес) авторы Айзек Азимов болады, ол фанаттар арасындағы ең үлкен зерттеуші болған.

Азимов роботтың механикалық құрылғылары жайлы өте аз жазған еді. Бірақ кітабында роботтың сырты қатты металдармен немесе ерекше пластикпен қапталғандығын, адам тектес роботтардың ішкі құрылысы ас қорыту процессін көрсететін фторпластиктен жасалған қаптан тұратынын жазған [14].

Робототехника (робот және техника сөздерден; ағыл. *robotics* — **роботика**, *робототехника*) – білім алушылардың бағдарламалау және құрастыру дағдыларын дамытуға мүмкіндік беретін пәндердің бірі [10][11][12].

Робототехника – автоматтандырылған жүйелерді, роботтарды құрумен айналысатын қолданбалы ғылым. Робототехника физика, математика, информатика, механика, кибернетика секілді ғылымдарға сүйенеді [13].

Робототехника – білім берудегі әмбебап құрал. Оны мектеп пәні ретінде, сабақтан тыс іс-шаралар ретінде және қосымша ретінде оқытуға болады. Барлық жастағы адамдарға сәйкес келеді, мектепке дейінгі балалардан бастап кәсіптік білімге дейін. Сонымен қатар, робототехникалық құралдарды пайдалана отырып балаларды оқыту – бұл ойын барысында оқыту және техникалық шығармашылық болып табылады және өздеріне сенімді, өз ісіне қызулығымен және жауапкершілікпен қарайтын тұлғаларды тәрбиелеуге жетелейді [15][16][17].

Білім беру робототехникасы адамдардың техникалық жағынан икемділігін ерте уақытта анықтауға және осы бағытта өсуге көмектеседі.

Робототехниканы бастауыш, жалпы орта, кәсіптік және жоғарғы білім беруде және арнайы оқытуда қолдануға болады.

Робототехника пәнінің оқытудағы міндеті:

- робототехниканың қазіргі заманғы жағдайымен таныстыру;
- логикалық және шығармашылық ойды дамыту;
- робототехника және роботтарды құрастыру саласындағы негізгі ұғымдарды қарастыру;
- роботтарды құруға және программалауға үйрету;
- техникалық-шығармашылық саласында жобалар құру және ұсыну біліктілігін арттыру;

Робототехниканың Қазақстандағы қазіргі жағдайына тоқталатын болсақ, робототехникаға ерекше көңіл бөлінуде. 2014 жылдан бастап жалпы білім беретін мектептерінің және Назарбаев Зияткерлік мектептерінің оқушылары арасында жыл сайын Робототехникадан Республикалық олимпиада өткізілуде. Республикалық олимпиада жеңімпаздарының Робототехникадан Бүкіләлемдік олимпиадаға (WRO – World Robots Olympiad) қатысуға мүмкіндіктері бар. Сонымен қатар, 2015 жылдан бастап Қарағанды қаласындағы «RoboLand» Халықаралық робототехника фестивалі жыл сайын өткізілуде, оған басқа елдерден де өкілдер қатысады (Сербия, Ресей және т.б.).

2016 жылдан бастап алғаш рет робототехниканың оқу зертханалары ашыла басталды, ең алғашқысы Алматы қаласындағы №159 гимназиясында ашылды. Жақын арада Қазақстанның басқа мектептерінде тағы 90 зертхананың ашылуы жоспарланды. Педагог мамандарды даярлау да жүргізіліп жатыр: қазіргі уақытта «Робототехника» элективті курсы бойынша 64 тренер даярланды.

STEAM-білім беру саласында халықаралық ынтымақтастық жасасудың тәжірибесі де бар. Мысалы, 2014 жылдан бері 20 млн. стерлинг фунты жалпы бюджетімен Ұлыбритания мен Қазақстан арасындағы «Ньютон – әл-Фараби» атты бесжылдық бағдарламасы жүзеге асырып жатыр. Бағдарламаның басты мақсаты – ғылыми және инновациялық әлеуетті нығайту, мамандар

алмасу және бірлескен зерттеу орталықтарын құруда екі мемлекеттің өзара іс-әрекеттесуі.

Осылайша, біздің еліміз дамыған елдермен бірдей бағытта ілгерілеп келеді. STEAM-білім беру оқуды және мансапты қосатын көпір болып табылады. Оның тұжырымдамасы балаларды технологиялық тұрғыдан дамыған әлемге дайындайды. Келешектің мамандарына жан-жақты дайындық пен жаратылыстану ғылымдары, инженерия, технологиялар мен математиканың әртүрлі білім беру салаларынан алынған білім керек [18][19][20].

ӘДЕБИЕТ

- [1] Бочкова О. А. Естествознание: задачи и проблемы, стоящие перед учителем. Естествознание в школе. 2005, №1, с. 4 – 9.
- [2] Рохлов В. С. Организация проектной деятельности в школе. Биология. 2005, № 14, с.27–33.
- [3] Волков А., Ливанов Д. Ставка на новое содержание: Ключевые тренды новой парадигмы высшего образования России. Вестник. - 03.09.2012.
- [4] Эффективность Национальной инновационной системы США: В поисках нового качества университетов. - М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2011.
- [5] Теория и методика обучения физике в школе: Общие вопросы: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. С.Е. Каменецкий, Н.С. Пурышева, Н.Е. Важевская и др.; Под ред. С.Е. Каменецкого, Н.С. Пурышевой. – М.: Издательский центр «Академия», 2000.–368с.
- [6] Развитие STEM-образования в мире и Казахстане. Интервью 06.11.2016. Республиканская образовательная общественно-политическая газета «Білімді ел – Образованная страна».
- [7] Робот. Большая советская энциклопедия : [в 30 т.]. гл. ред. А. М. Прохоров. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.
- [8] Чапек. Большая советская энциклопедия : [в 30 т.] гл. ред. А. М. Прохоров. - 3-е изд. - М. : Советская энциклопедия, 1969-1978.
- [9] R.U.R. Карел Чапек. Прага: Пламя, 1924 г., пьеса, перевод И. Каллиникова.
- [10] Политический терминологический толковый словарь. Составление: В. Бутаков, И. Фаградианц. - М.: Polyglossum, 2014.
- [11] Традиционный перевод на русский в произведениях А. Азимова.
- [12] Попов Е.П., Письменный Г. В. Основы робототехники: Введение в специальность. - М.: Высшая школа, 1990. - 224 с. - ISBN 5-06-001644-7
- [13] Лжец. Айзек Азимов. Рассказ, 1941 год; цикл «Галактическая история», Переводы на русский: А. Иорданского.
- [14] А. Азимов. Я, робот. М.: Знание, 1964 г. Редактор О. Соколов. перевод А. Иорданского.
- [15] Макаров И. М., Топчеев Ю. И. Робототехника: История и перспективы. - М.: Наука; Изд-во МАИ, 2003. - 349 с. - ISBN 5-02-013159-8.
- [16] Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник. - Киев: Наукова думка, 1983. - 639 с
- [17] Введение в робототехнику: Накано Э. Пер. с япон. — М.: Мир, 1988. - 334 с., ил.
- [18] Основы робототехники. Юревич Е. И. - 2-е изд., перераб. и доп. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 416 с: ил.
- [19] Курс робототехники. Шахинпур М., Зенкевич С.Л., Дмитриев С.С. Издательство «Мир». 1990 год.
- [20] Основы робототехники. Шахинпур М., Зенкевич С.Л., Дмитриев С.С. 1993 г. Учебное пособие для высших учебных заведений. МГП «РАСКО».

REFERENCES

- [1] Bochkova O.A. Natural: the challenges and problems faced by the teacher. Natural school. 2005, №1, p. 4 – 9.
- [2] Rokhlov V.S. Organization of project activities at the school. Biology. 2005, № 14, p.27-33.
- [3] Volkov A., Livanov D. The rate on new content: Key trends in new paradigm of higher education in Russia. Vedomosti. - 03.09.2012.
- [4] The effectiveness of the US national innovation system: In search of a new university quality. - M. : Research center of problems of quality of training, 2011.
- [5] Theory and methods of teaching physics in school: General questions Textbook for students of higher educational institutions. S.E Kamenetzkyi, N.S Puryshcheva, N.E Wazewskaya and etc.; M.: Publishing Center "Academy" 2000. -368 page.
- [6] Development of STEM-education in the world and Kazakhstan. Interviews 11.06.2016. Republican educational socio-political newspaper "Bilimdi el - educated country."
- [7] Robot. Great Soviet Encyclopedia: [30 volume.]. Ch. Ed. Prokhorov. - 3rd Ed. - Moscow: Soviet Encyclopedia, 1969-1978.
- [8] Capek. Great Soviet Encyclopedia: [30 v.] Chapter. Ed. Prokhorov. - 3rd Ed. - Moscow: Soviet Encyclopedia, 1969-1978.
- [9] R.U.R. Karel Capek. Prague: Flame, 1924, play, transfer I. Kallinikova.
- [10] The terminology Polytechnic Dictionary. Drawing: V. Butakov I. Fagradiants. - M. : Polyglossum, 2014.
- [11] Traditional translation into Russian of the works of A. Asimov.
- [12] Writing, Popov, 1990, p. 3.

- [13] Liar, Isaac Asimov. Story, 1941; cycle "Galactic history" Translations into Russian: A. Jordanskii.
- [14] A. Azimov. I am a robot. М. : Knowledge, 1964, O. Sokolov editor, Translation A. Jordanskii.
- [15] Bogolyubov A.N Mathematics. Mechanics. Biographical Directory. - Kiev: Naukova Dumka, 1983. - 639
- [16] Makarov I.M, Topcheev Y.I Robotics: History and Prospects. - М. : Science; Publishing house of the Moscow Aviation Institute, 2003. - 349 p. - ISBN 5-02-013159-8.
- [17] Introduction to robotics: E. Nakano, Translation with Japan. - М. : Mir, 1988. – 334 p.
- [18] The Basics of robotics. Yurevich E.I - 2 nd ed., Revised. and ext. - SPb. : BHV-Petersburg, 2005. - 416 p.
- [19] Robotics Course. Shahinpur M., Zenkevich S.L, S.S Dmitriev, Publishing House "Mir", 1990 year.
- [20] The Basics of robotics. Shahinpur M., Zenkevich S.L, S.S Dmitriev, 1993 year, Textbook for higher educational institutions, IHL "RASCO".

Г.И.Салғараева, А.Базарбаева

Казахский государственный женский педагогический университет, г. Алматы

СИСТЕМА STEAM В ОБРАЗОВАНИИ И РОБОТОТЕХНИКА

Аннотация. В этой статье написано о системе STEAM, её определение, появление и о преимуществах этой системы. Также поднимается вопрос о том, что такое робототехника, цели преподавания робототехники и рассказывается о нынешней ситуации робототехники в Казахстане. Система STEAM - это инновация, которая завоёвывает весь мир. Есть вероятность, что в будущем все сферы образования будут работать по этой системе. Потому что в обучении предметов гораздо эффективнее не ограничиваться теоритическими знаниями, а также важно закрепление знаний на практике в процессе создания и модернизации проектов, связывая их с другими предметами. Поэтому сейчас в обучении большое внимание нужно уделять интегрированному образованию. Интегрированное обучение помогает развить в людях техническое творчество, критическое мышление, способность работать в группах, с ответственностью и интересом относиться к работе. Приведена информация о термине «робот», фактах в сфере робототехники и о преимуществах преподавания робототехники как предмета. Если рассматривать робототехнику как элемент системы STEAM, то ученики и студенты не будут проводить много времени за партами, а будут в процессе работы над своими проектами, программированием, тестированием и обновлением. Учитывая этот факт, можно гарантировать, что уроки для учеников и студентов будут проходить интересней.

Ключевые слова: система STEAM, образование, предмет, интегральное обучение, робототехника, научно-техническое образование, технологическое творчество.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 87 – 97

UDC 517.9

M. I. Akylbayev¹, S. Parkhatova², A.Sh. Shaldanbayev²

¹Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Kazakhstan, Shymkent;

²M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent

shaldanbaev51@mail.ru

ON JOINTLY COMPLETENESS OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

Annotation. Completeness and basicity is one of the key concepts of the spectral theory of operators. The eigenvectors and associated vectors of the Sturm-Liouville model operator always form a complete system, excluding the Volterian case. If we confine ourselves only to our own vectors, then they can not form a complete system, which is a consequence of the presence of a multiple spectrum of the operator. In the present paper it is shown that the set of eigenvectors of the Sturm-Liouville operator and its conjugate can form a complete system, which is evidence of the presence of non-trivial invariant subspaces in the operator.

Keywords: Sturm-Liouville operator, completeness, joint completeness, invariant subspaces, conjugate operator.

УДК 517.9

М.И. Ақылбаев¹, С. Пархатова², А.Ш. Шалданбаев²

¹Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы;

²Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

БІРЛЕСІП ТОЛЫҚҚАН ОПЕРАТОРЛАР

1. Кіріспе

Кәдімгі дифференциалдық операторлардың спектралді теориясы, Ш. Штурм мен Ж. Лиувиллдің, және кейінгі В.А. Стеклов [1,2] пен Я.Д. Тамаркиннің [3,4], Д. Биркгофтың [5,6] және көптеген басқа авторлардың зерттеулерінен бастау алады, бұл еңбектерде әртүрлі шекаралық есептердің меншікті мәндерінің асимптотикасы зерттеліп, және соның барысында спектралді таралымдардың жинақталу кластары анықталады.

Бастапқы кезеңде, жалқы дифференциалдық операторлардың спектралдік қасиеттері зерттелді. Спектрі сирек жалқы дифференциалдық операторлардың меншікті векторларының L_2 кеңістігінде ортанормаланған базис құрайтыны қазіргі кезеңде көпке мәлім.

Жалқы эллипстік дифференциалдық оператордың спектралдік таралымдарының жинақталу проблемалары Ш.А. Алимов, Б.А. Ильин, Е.М. Никишиндердің [7] көлемді еңбегінде зерттелген, және ол зерттелулер В.А. Ильиннің [8] кітабынан орын алған.

Соңғы он жылдықта, математикалық физиканың әртүрлі салаларында бейбайырғы есептер пайда болды (мысалы, сиретілген плазманың орнықтылық мәселелері, ядролық реактордың есептері т.с.с). сынарлы есептерді зерттелгенде мамандар көптеген қыйындықтармен кездеседі. Мұндай есептердің спектрі мүлдем болмауы мүмкін, болған сәттің өзінде меншікті функциялары негізгі кеңістікте толымсыз болуы мүмкін. Бұл сәтте оларды жапсарлас функциялармен толықтыру

қалыптасты. Түпкі функциялардың толымдылық проблемаларына М.В. Келдыштың [9.10] еңбектері арналған, бұл еңбектер сыңарлы дифференциалдық операторлардың спектралді теориясына қосылған сүбелі үлес болып саналады және бұл еңбектер осы саладағы көптеген басқа еңбектердің пайда болуына мұрындық болды, соның нәтижесінде бұл мәселе қазіргі сәтте біршама тәуір зерттелген десекте болады, мысалы В.Б. Лидский [11.12], М.А. Неймарк [13.14], В.Н. Визитей мен А.С. Маркус [15.16], А.М. Кралл [17.18], М.Стоун [19], А.А. Шкаликов [20.21] және т.б.

Елімізде түпкі функциялардың толымдылық проблемасына М. Өтелбаевтың [22], Т.Ш. Кәлменовтың [23], Б.Е.Кангужиннің [24], және олардың оқыушыларының еңбектері арналған.

Көптеген шекаралық есептердің меншікті мәндерінің асимптотикасы төмендегі, Я.Д. Тамаркин [3.4], Д. Биркгоф [6] М.В. Келдыш [9.10], Р. Лангер [25.26], М.В. Федорюк [27], А.Г. Костюченко [28], М. Өтелбаев [29], Б.Е. Кангужин, М.А. Садыбеков [30] еңбектерде кеңінен зерттеледі.

Дифференциалдық оператордың меншікті функциялар системасы L_2 кеңістігінде толымсыз болған сәтте, оны сыңар оператордың меншікті функцияларымен толықтыруға болады ма? деген мәселе күні бүгінге дейін толық шешімін таппай келеді. Біз өз зерттеулерімізді осы арнаға бұрдық.

Бірінші бөлімде есеп қойылды, 2- бөлімде әдісі, 3- бөлімде нәтижелері, 4- бөлімде алынған нәтижелер талқыға салынды, 5- бөлімде тиісті қорытындылар жасалды.

Есептің қойылуы немесе мәселенің мән жайы

Мәселе. H - гилберттің кеңістігі, ал A - осы кеңістікте анықталған сызықтық дискретті оператор болсын делік, яғни $Vf, g \in H, f, g \in D(A)$ үшін

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$$

Теңдігі орындалады, мұндағы α, β скаляр шамалар, ал f, g әлгі H кеңістігінің векторлары. A операторының спектрі тек меншікті мәндерден $\{\lambda_n\}, n = 1, 2, \dots$ тұрады және $\{\lambda_n\}$ тізбегінің шектік нүктесі тек ∞ болуы мүмкін. Бұл A операторының меншікті векторлары H кеңістігінде толымды болса жақсы, толымсыз болған жағдайда еншілес функцияларды қарастыруға тура келеді. Бұл сәтте, белгілі бір қиындықтар туындайды. Осыған байланысты, мынадай, мәселелер туындайды.

1) Егер A операторының меншікті векторлары H кеңістігінде толымсыз болса, онда оны, оныңсыңар A^* операторының меншікті векторлары арқылы толықтыруға бола ма? Жалпы өзі осындай операторлар кездеседі ме?

2) Осындай операторлар бар болса, ондамынадай

$$u_t = Au,$$

$$u \in D(A)$$

Параболалық теңдеулердің аралас есептердің шешімін табуға болады ма?

Біз өз зерттеулерімізде 1) мәселенің жалқы шешімін таптық, дәлірек айтқанда нақты мысал құрастырдық.

2. Зерттеу әдістері

Гилберттің $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде мынадай,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi); \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

Шекаралық есепті қарастыралық. Жоғарыдағы (1) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(x; \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \quad (3)$$

болары белгілі, мұндағы A, B - кезкелген тұрақты шамалар. Осы, (3), формуланы (2) шекаралық шарттарға апарып қоялық:

$$A = 0, \Rightarrow y(x; \lambda) = B \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, y'(x; \lambda) = B \cos \sqrt{\lambda}x,$$

$$y'(0) + y'(\pi) = B + B \cos \pi \sqrt{\lambda} = B [1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}] = 0, B \neq 0,$$

сондықтан,

$$\Delta(\lambda) = 1 + \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0, \cos \pi \sqrt{\lambda} = -1, \pi \sqrt{\lambda} = (2n - 1)\pi,$$

$$\sqrt{\lambda} = 2n - 1, \lambda_n = (2n - 1)^2, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Бұлменшіктімәндерге мынадай,

$$y_n(x) = B_n \sin(2n - 1)x, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

Меншікті функциялар сәйкескеледі.

Мына,

$$\begin{aligned} y_{-n}(x) &= B_{-n} \times \sin(-2n - 1)x = -B_{-n} \sin(2n + 1)x = -B_{-n} \frac{y_{n+1}(x)}{B_{n+1}} = \\ &= -\frac{B_{-n}}{B_{n+1}} y_{n+1}(x), \end{aligned}$$

жайтқа байланысты теріс индекстерді қарастырмаймыз, сонымен меншікті функциялар мыналар,

$$y_n(x) = B_n \times \sin(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots,$$

болады екен.

Енді, осы меншікті функциялардың қасиеттеріне тоқталайық.

$$\begin{aligned} y_n(\pi - x) &= B_n \times \sin(2n - 1)(\pi - x) = B_n \sin[(2n - 1)\pi - (2n - 1)x] = \\ &= -B_n \cos(2n - 1)\pi \times \sin(2n - 1)x = B_n \sin(2n - 1)x = y_n(x). \end{aligned}$$

Демек, бұл меншікті функциялар системасы $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз, шынында-да, егер $f(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы мынадай,

$$f(\pi - x) = -f(x) \quad (4)$$

болса, онда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx &= \left| \frac{x = \pi - t}{dx = -dt} \right| = - \int_\pi^0 f(\pi - t) y_n(\pi - t) dt = \\ &= \int_0^\pi f(\pi - t) y_n(\pi - t) dt = - \int_0^\pi f(t) y_n(t) dt = - \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx, \Rightarrow \\ &2 \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx = 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Енді (4) қасиетке ие функцияның бар екеніне көз жеткізейік. Егер $g(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы H кеңістігінің кезкелген элемент болса, онда

$$f(x) = \frac{g(x) - g(\pi - x)}{2}$$

деуімізге болады, шынында-да

$$f(\pi - x) = \frac{g(\pi - x) - g(x)}{2} = -\frac{g(x) - g(\pi - x)}{2} = -f(x).$$

Алынған нәтижелерді біртұжырымдап қоялық.

Теорема 1. Штурм-Лиувиллдің, мына,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

Шекаралық есебінің меншікті мәндері, мыналар,

$$\lambda_n = (2n - 1)^2, n = 1, 2, \dots$$

Бұл меншікті мәндерге, мынадай,

$$y_n(x) = B_n \sin(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots,$$

меншікті функциялар сәйкес келеді, және олар $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз система құрайды.

Гилберттің $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде мына,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi) = 0$$

шекаралық есепке сыңарлас шекаралық есепті қарастыралық. Алдымен, L операторының сыңарласын табайық

$$\begin{aligned} (Ly, z) &= - \int_0^\pi y'' \bar{z} dx = - \int_0^\pi \bar{z} dy' = - \bar{z} y' \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \bar{z}' dy = \\ &= - \bar{z} y' \Big|_0^\pi + \bar{z}' y \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \bar{z}'' y dx = \\ &= - \bar{z}(\pi) y'(\pi) + \bar{z}(0) y'(0) + \bar{z}'(\pi) y(\pi) - \bar{z}'(0) y(0) + (y, L^+ z) = \\ &= - \bar{z}(\pi) y'(\pi) - \bar{z}(0) y'(0) + \bar{z}'(\pi) y(\pi) + (y, L^+ z) = \\ &= - [\bar{z}(\pi) + \bar{z}(0)] y'(\pi) + \bar{z}'(\pi) y(\pi) + (y, L^+ z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Демек, } y(\pi) \times z'(\pi) - [\bar{z}(0) + \bar{z}(\pi)] \times y'(0) &= 0, \text{ мұнан,} \\ \bar{z}'(\pi) = 0, \bar{z}(0) + \bar{z}(\pi) = 0; \Rightarrow z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Лемма 1. Мына

$$Ly = -y''(x); y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi);$$

$$L^+ z = -z''(x); z(0) + z(\pi) = 0, z'(\pi) = 0$$

операторлар өзара сыңарлас.

Енді, осы L^+ сыңарлас операторының спектралдік қасиеттерін зерттейік, дәлірек айтқанда, мына,

$$L^+ z = -z''(x) = \mu z(x), x \in (0, \pi) \quad (5)$$

$$z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) = 0 \quad (6)$$

шекаралық есепті зерттейік.

Жоғарыдағы, (5) теңдеудің жалпы шешімі, мынадай,

$$z(x, \mu) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, A, B - \text{const} \quad (7)$$

екені, бесенеден белгілі.

Осы, (7) формуланы (6) шекаралық шарттарға апарып қойсақ, меншікті мәндер мен меншікті функцияларды табамыз.

$$z'(x; \mu) = -\sqrt{\lambda}A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$z'(x; \mu)|_{x=\pi} = -\sqrt{\lambda}A \sin \pi \sqrt{\lambda} + B \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0;$$

$$z(0) + z(\pi) = A + A \cos \pi \sqrt{\lambda} + B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0;$$

Белгісіз A және B шамалары үшін, мынадай,

$$\begin{cases} -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} A + \cos \pi \sqrt{\lambda} B = 0, \\ (1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}) A + \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} B = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Теңдеулер системасын алдық. Бұл теңдеулер системасының шешімі бар болуы үшін оның анықталушы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & \cos \pi \sqrt{\lambda} \\ 1 + \cos \pi \sqrt{\lambda} & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix}$$

Нөлге айналуы қажетті әрі жеткілікті. $\Delta(\lambda)$ -ны ашып жазсақ

$$\Delta(\lambda) = -\sin^2 \pi \sqrt{\lambda} - \cos \pi \sqrt{\lambda} - \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} = -1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}$$

боларын көреміз. Ендіосы $\Delta(\lambda)$ - функциясының нөлдерін зерттейік.

$$\Delta(\lambda) = -[1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}] = 0, \cos \pi \sqrt{\lambda} = -1, \pi \sqrt{\lambda} = (2n - 1)\pi,$$

$$\sqrt{\lambda} = 2n - 1, \lambda_n = (2n - 1)^2, n = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Енді меншікті функцияларды табайық. Бұл үшін (8) системаға назар аударайық, оның бірінші теңдеуінен

$$A_n = K_n \times \cos \pi \sqrt{\lambda_n}, B_n = K_n \sqrt{\lambda_n} \sin \pi \sqrt{\lambda_n}, K_n - const$$

алу кере кекенін байқаймыз. Сонымен,

$$\begin{aligned} z_n(x) &= K_n \cos \pi \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + K_n \sqrt{\lambda_n} \sin \pi \sqrt{\lambda_n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} = \\ &= K_n \left[\cos \pi \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + \sin \pi \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} x \right] = \\ &= K_n \times \cos \sqrt{\lambda_n} (\pi - x); \end{aligned}$$

Демек, $K_n \cos(2n - 1) (\pi - x), n = \pm 1, \pm 2, \dots$, мұнан,

$$\begin{aligned} K_{-n} &= \cos(-2n - 1) (\pi - x) = K_{-n} \times \cos(2n + 1)(\pi - x) = \\ &= K_{-n} \times \frac{y_{n+1}(x)}{K_{n+1}} = \frac{K_{-n}}{K_{n+1}} \end{aligned}$$

олай болса теріс индекстерге назар аудармауға болады.

Әріқарай,

$$K_n \cos[(2n - 1)\pi - (2n - 1)x] = K_n \cos(2n - 1)\pi \cos(2n - 1)x =$$

$$= -K_n \cos(2n - 1)x;$$

$$(\pi - x) = K_n \cos(2n - 1)x = -(x), n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

Осы соңғы (9) қасиеттің салдарынан $\{y_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ системасы $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз система құрайды, шынында-да $f(x) \in L^2(0, \pi)$ және $f(\pi - x) = f(x)$ болсын делік, онда

$$\begin{aligned} (f, z_n) &= \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = - \int_\pi^0 f(\pi - t)z_n(\pi - t)dt = \\ &= \int_0^\pi f(\pi - t)z_n(\pi - t)dt = - \int_0^\pi f(t)z_n(t)dt = - \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx, \\ 2 \times \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx &= 0, \Rightarrow \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx = 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Алынған нәтижелерді тұжырымдап қоялық.

Теорема 2. Мына,

$$L^+z = -z''(x) = \mu z(x), x \in (0, \pi) \quad (5)$$

$$z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) = 0 \quad (6)$$

шекаралық есептің меншікті мәндері, мыналар,

$$\lambda_n = (2n - 1)^2, n = 1, 2, \dots$$

ал бұларға сәйкес меншікті функциялар мыналар,

$$z_n(x) = K_n \cos(2n - 1)(\pi - x), n = 1, 2, \dots$$

Олар, $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз система құрайды.

3. Зерттеу нәтижелері

Теорема 3.

Мына,

$$Ly = -y''(x); y'(0) + y'(\pi) = 0, y(0) = 0, x \in (0, \pi) \quad (10)$$

Штурм-Лиувилл операторы мен оныңсыңарласы

$$L^+z = -z''(x); z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) = 0 \quad (11)$$

операторының меншікті функциялары бірлесіп $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымды система құрайды, бірақ, әрқайсысы жеке-жеке толымды емес.

Дәлелі. Жоғарыда (10) оператор мен (11) оператордың меншікті функциялары толымсыз система құрайтынын көрсеттік. Енді олар бірлесіп толымды система құрайтынын көрсеттейік. Сонымен $\{y_n\} \cup \{z_n\}, n = 1, 2, \dots$ системасын қарастырайық, мұндағы,

$$y_n(x) = B_n \times \sin(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots$$

$$z_n(x) = A_n \cos(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots$$

Белгілібір $f(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы үшін

$$(f, y_n) = \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx = B_n \times \int_0^\pi f(x) \sin(2n-1)x dx = 0, n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$(f, z_n) = \int_0^\pi f(x) z_n(x) dx = A_n \times \int_0^\pi f(x) \cos(2n-1)x dx = 0, n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

теңдіктер орындалсын делік. Онда $(0, \pi)$ интервалының барлық нүктелерінде дерлік $f(x) = 0$ теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Лемма 2.

Егер $Pu(x) = \frac{u(x)+u(\pi-x)}{2}$ және $Qv(x) = \frac{v(x)-v(\pi-x)}{2}$ болса, онда P мен Q операторлары $L^2(0, \pi)$ кеңістігінің проекторлары, яғни

$$\text{а) } P^2 = P, P^* = P; \quad (14)$$

$$\text{б) } Q^2 = Q, Q^* = Q \quad (15)$$

теңдіктер орындалады.

Дәлелі.

$$\begin{aligned} \text{а) } P^2 u(x) &= P(Pu)x = P_0 \frac{u(x)+u(\pi-x)}{2} = \frac{Pu(x)+Pu(\pi-x)}{2} = \\ &= \frac{u(x) + u(\pi-x)}{2} + \frac{u(\pi-x) + u(x)}{2} = \frac{u(x) + (\pi-x)}{2} = Pu(x); (Pu, v) \\ &= \int_0^\pi Pu \times v dx = \int_0^\pi \frac{u(x) + u(\pi-x)}{2} v(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u(x)v(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi u(\pi-x)v(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u(t)v(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi u(t)v(\pi-t) dt = \int_0^\pi u(t) \frac{v(t) + v(\pi-t)}{2} dt = \\ &(u, Pv), \Rightarrow P^* = P. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } Q^2 v &= Q(Qv) = Q_0 \frac{v(x)-v(\pi-x)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [Qv - Qv(\pi-x)] = \frac{1}{2} \left[\frac{v(x) - v(\pi-x)}{2} - \frac{v(\pi-x) - v(x)}{2} \right] = \\ &= \frac{v(x) - v(\pi-x)}{2} = Qv(x), \rightarrow Q^2 = Q; \\ (Qv, u) &= \int_0^\pi \frac{v(x) - v(\pi-x)}{2} u(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi v(x)u(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi v(\pi-x)u(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi v(t)u(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi v(t)u(\pi-t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi v(t)[u(t) - u(\pi-t)] dt = \int_0^\pi v(t) \frac{u(t) - u(\pi-t)}{2} dt = (v, Qu), \rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow Q^* = Q;$

Енді, мына, жайларға назар аударайық.

$$P \sin nx = \frac{\sin n(\pi-x) + \sin nx}{2} = \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{2} \sin nx;$$

$$Q \sin nx = \frac{\sin nx - \sin n(\pi - x)}{2} = \frac{\sin nx - (-1)^{n+1} \sin nx}{2} = \frac{1 + (-1)^n}{2} \sin nx.$$

Демек,

$$P \sin(2n - 1)x = \sin(2n - 1)x, Q \sin(2n - 1)x = 0.$$

Солсыйақты,

$$P \cos nx = \frac{\cos(\pi - x) + \cos nx}{2} = \frac{\cos n\pi \cos nx + \sin n\pi \sin nx + \cos nx}{2} = \frac{1 + \cos n\pi}{2} \cos nx = \frac{1 + (-1)^n}{2} \cos nx.$$

$$Q \cos nx = \frac{\cos nx - \cos(\pi - x)}{2} = \frac{\cos nx - (-1)^n \cos nx}{2} = \frac{1 - (-1)^n}{2} \cos nx.$$

Демек,

$$Q \cos 2nx = 0, Q \cos(2n - 1)x = \cos(2n - 1)x$$

Егер (12) теңдіктер орындалса, онда (14) және (15) формулалар қасында

$$(f, \sin(2n - 1)x) = \int_0^\pi f(x) \sin(2n - 1)x dx = \int_0^\pi f(x) P \sin(2n - 1)x dx = (f, P \sin(2n - 1)x) = (Pf, \sin(2n - 1)x) = (Pf, \sin nx) = 0, n = 1, 2, \dots,$$

мұнан, $Pf(x) = 0$;

Егер (13) орындалса, онда (14) және (15) формулалар қылы

$$(f, \cos(2n - 1)x) = \int_0^\pi f(x) \cos(2n - 1)x dx = \int_0^\pi f(x) Q \cos(2n - 1)x dx = (f, Q \cos(2n - 1)x) = (Qf, \cos(2n - 1)x) = (Qf, \cos nx) = 0,$$

мұнан, $Qf = 0$.

Егер (12) және (13) шарттар бірдей орындалса, онда $f(x) = (P + Q)f(x) = Pf(x) + Qf(x) = 0$ Теорема дәлелденді.

4. Талқысы

Зерттелген Штурм-Лиувилл операторының ішкі инвариантты кеңістігі бар екен, және ол көпсалалы, мұндай жақдай сирек кездеседі. Оператордың сыңарының да қасиеті сондай, шамасы бұл кеңістіктердің арасында тығыз байланыс бар. Біз кейінірек бұл мәселелерге қайта оралмақпыз.

5. Қорытынды

Табиғатта ешбір құбылыс жеке дара кездеспейді, оларды оқшаулау біздің ниетімізден туындаған, олай етпесек біз ешбір құбылысты зерттей алмас едік. Мысалы, вакуум ұғымын адамдар енгізген, ол дүниеде жоқ нәрсе, сол сыйақты абсолютті нөл ұғымын да біз енгізгенбіз. Сонымен, біз бір құбылысты зерттегенде, оған басқа сыртқы әсерлер жоқ деп санаймыз, яғни біз сол құбылыстың ең негізгі қасиеттеріне тоқталып, басқа нәрселерге көңіл бөлмейміз, яғни сыртқы әсер жоқ. Мұндай системалар тұйық жабық болады, сондықтан толық энергиясы сақталады. Міне,

дәл осындай системалар жалқы дифференциалдық операторлармен өрнектеледі, ал егер сыртқы әсерлерді ескерер болсақ, онда сыңарлы дифференциалдық операторларды қарастыруымызға тура келеді. Егерде құбылысқа әсер етуші барлық нәрселер еленген болса, онда, әрине, системаның толық энергиясы сақталар еді, бірақ, бұл сәтте толық энергия ішкі және сыртқы болып екіге бөлінер еді. Дифференциалдық операторлар тілімен айтқанда бастапқы оператор мен мен оның сыңарының меншікті функциялары бірлесіп толық система құрайды. Мысалы, көл бетіне түскен күн сәулесі толық шығылысқан сәтте, осындай системаны құрайды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Стеклов В.А. Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. Харьков: Издательство ХГУ, 1956. - С. 1 - 138.
- [2] Стеклов В. А. Solution generale du problem de developpment d'une fonetion arbitruire en series suivent les fonction fondamentales de Sturm- Liouville//PAL.5,serie. – 1940. - V.19, P.490-496.
- [3] Тамаркин Я.Д. Sur quelques points de theorie des equations differentielleslineairesordinfires of sur la generalization de la serie de Fourier // Rend. Di Palermo. – 1912. – Vol. 34.-P.345-382.
- [4] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград., 1917. - 308 с.
- [5] Биркгоф Д. (BirkhoffG.D.) Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans.Amer.Math.Soc. – 1908. - V. 9, № 4. -P. 373-395.
- [6] Биркгоф Д. (Birkhoff G.D.) On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Amer.Math.Soc. – 1908. - V.9,- P.219-231.
- [7] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I, II, // Успехи мат. Наук. – 1976. - Т. 31, вып.6. - С.28-83.; 1977. - Т. 32, вып. 1. - С. 107-130.
- [8] Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. - М., 1991. - 368 с.
- [9] Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений//ДАН СССР. – 1951. - Т. 77, № 1. - С. 11-14.
- [10] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов // Успехи матем.наук. – 1971. - Т. 26,Вып. 4(160). - С. 15-41.
- [11] Лидский В.Б. О полноте системы собственных и присоединённых функций несамосопряжённого дифференциального оператора // ДАН СССР. – 1956. - Т. 110, № 2. - С. 172-175.
- [12] Лидский В.Б. Несамосопряжённый оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром //Труды Моск. матем. общества. - 1960. - № 9. - С. 45-79.
- [13] Наймарк М.А. О разложении по собственным функциям несамосопряжённых сингулярных дифференциальных операторов второго порядка //ДАН СССР. – 1953. - Т. 89, № 2. - С. 213-216.
- [14] Наймарк М.А. О некоторых признаках полноты систем собственных и присоединённых векторов в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1954. - Т. 98, № 5. – С. 727-730.
- [15] Визитей В.Н., Маркус А.С. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединённых векторов операторного пучка //Матем. Сборник. – 1965. - Т. 66, № 2(108). - С. 287-320.
- [16] Маркус А.С. О кратной полноте и сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединённых векторовоператорного пучка //ДАН СССР. – 1965. - Т. 163, № 5. - С. 1061 - 1064.
- [17] Кралл А.М. (Kroll A.M.). О несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторах второго порядка //ДАН СССР. – 1965. - Т. 165, № 6. - С. 1235-1237.
- [18] Кралл А.М. (Kroll A.M.). The development of general differential and general differential boundary systems // Rochg Mountain. J.Math. – 1975. - V. 5, № 4. - P. 493-542.
- [19] Стоун М. (Stone M.H.).A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans.Amer.Math.Soc. –1926. -V. 28. - P. 695-761.
- [20] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды сем. им. И.Г.Петровского. – 1983. - Вып. 9. - С. 190-229.
- [21] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями //Вестник МГУ, сер.матем. – 1982. - № 6. - С. 12-21.
- [22] Отелбаев М. Оценки S-чисел и условия полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля // Мат. Заметки. - 1979. - Т. 25, № 3. - С. 409-418.
- [23] Кальменов Т.Ш., Бименов М.А. Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми // Дифференц.уравнения. - 2003. - Т. 39, № 10. - С. 1425-1428.
- [24] Кангузин Б.Е. Полнота и минимальность систем корневых функций дифференциального оператора на отрезке // Узбекский математический журнал. - 2002. - № 1. - С. 23-29.
- [25] Лангрен Р.(Langer R.). The asymptotic solution of certain linear ordinary differential equations of the second order // Trans.Amer.Math.Soc. –1934. -V. 36. - P. 90-106.

- [26] Лангер Р.(Langer R.). The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order,with spectral reference to a turning point // Trans.Amer.Math.Soc. –1949. - V. 67. - P. 461-490.
- [27] Федорюк М.В. Асимптотика решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения n -го порядка //Дифференц. Уравнения. – 1966. - Т. 2, № 4. - С. 492-507.
- [28] Костюченко А.Г. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов //ДАН СССР. - 1960. -Т. 168, № 1. - С. 21-24.
- [29] Отелбаев М. Оценки собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов // Математические заметки. –1976. - Т. 20, № 6. - С. 859-867.
- [30] Кангузин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. - Шымкент:Ғылым, 1999. - 270с.
- [31] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. - 528 с.
- [32] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. I. Москва: Иностран. лит-ра, 1960. - 278 с.
- [33] Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч.зап. МГУ. – 1951. -Т. 4, Вып. 148. - С. 69-107.

REFERENCES

- [1] Steklov V. A. About asymptotic expression of some the functions determined by the linear differential equation of the second order and their application to a problem of decomposition of proizvolny function in a row by these functions. Kharkiv: HGU publishing house, 1956. - Page I - 138.
- [2] Steklov V. A. Solution generale du problem de developpment d'une fonetion arbitruire en series suivent les fonction fondamentales de Sturm-Liouville//PAL.5, serie. – 1940. - V.19, P.490-496.
- [3] Tamarkinya.D. Sur quelques points de theorie des equations differentielleslineairesordinfires of sur la generalization de la serie de Fouries//Rend. Di Palermo. – 1912. – Vol. 34. - P.345-382.
- [4] Tamarkin Ya. D. About some general tasks of the theory the obyknokvennykh the linear differential equations and about decomposition the prokizvolnykh of functions in ranks. – Petrograd., 1917. - 308 pages.
- [5] Birkgofd. (BirkhoffG.D.) Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations//Trans.Amer.Math.Soc. – 1908. - V. 9, No. 4. - River 373-395.
- [6] Birkgofd. (Birkhoff G.D.) On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter//Trans. Amer.Math.Soc. – 1908. - V.9. - R.219-231.
- [7] Alims Sh. A., Ilyin V. A., Nikishin E. M. Questions of convergence multiple trigonometrical ranks and spectral decomposition. I, II//Progress mat. Sciences. – 1976. - Т. 31, issue 6. - Page 28-83.; 1977. - Т. 32, issue 1. - Page 107-130.
- [8] Ilyin V. A. Spectral theory of differential operators. - М, 1991. - 368 pages.
- [9] Keldysh M. V. About own values and own functions some classes of not self-conjugate equations//the USSR is GIVEN. – 1951. - Т. 77, No. 1. - Page 11-14.
- [10] Keldysh M. V. to 0 completeness of own functions of some classes not self-conjugate linear operators//Progress матем.наук. – 1971. - Т. 26, Issue 4(160). - Page 15-41.
- [11] Lidsky V. B. O to completeness of system own and prisoyediknyonnykh functions not self-conjugate differential operatora//the USSR is GIVEN. – 1956. - Т. 110, No. 2. - Page 172-175.
- [12] Lidsky V. B. Not self-conjugate operator of type of Storm -Liouville with a discrete range//Works Mosk. maty. the general stvo. - 1960. - No. 9. - Page 45-79.
- [13] Naymark M. A. About decomposition on own functions not self-conjugate singular differential operators the second order//the USSR is GIVEN. – 1953. - Т. 89, No. 2. - Page 213-216.
- [14] Naymark M. A. About some signs of completeness of systems own and attached vectors in Hilbert it is simple -ranstvo//the USSR is GIVEN. – 1954. - Т. 98, No. 5. – Page 727-730.
- [15] Vizitya V. N., Markus Ampere-second. About convergence of multiple decomposition on to system of own and attached vectors of OPEC rotor bunch//Matem. Collection. – 1965. - Т. 66, No. 2(108). - Page 287-320.
- [16] Markus A. S. About multiple completeness and convergence of multiple decomposition on system of own and attached vectors operator bunch//the USSR is GIVEN. – 1965. - Т. 163, No. 5. - Page of I06I - I064.
- [17] Krall A.M. (Kroll A.M.). About not self-conjugate ordinary the differenksialnykh operators of the second order//is GIVEN to the USSR.
- [18] Krall A.M. (Kroll A.M.). The development of general differential and general differential boundary systems//Rochg Mountain. J.Math. – 1975. - V. 5, No. 4. - River 493-542.
- [19] Stounm. (Stone M.H.). A comparison of the series of Fourier and Birkhoff//Trans.Amer.Math.Soc. –1926. - V. 28. - P. 695-761.
- [20] Shkalikov A. A. Regional tasks for ordinary diffek the rentsialnykh of the equations with parameter in boundary conditions//Works this. of I.G.Petrovsky. – 1983. - Issue 9. - Page 190-229.
- [21] Shkalikov A. A. 0 bazisnost of own functions obyknok the wine differential operator with integrated regional conditions//the Bulletin of MSU, ser.maty. – 1982. - No. 6. - Page 12-21.
- [22] Otelbayev M. Estimates of S-numbers and condition of completeness of system root vectors of not self-conjugate operator Shturma-Liuvillya//Mat. Notes. - 1979. - Т. 25, No. 3. - Page 409-418.

- [23] Kalmenov T. Sh., Bimenov M. A. About one sign of completeness root vectors of a task of Triкоми // *Differents.Uravneniya*. - 2003. - Т. 39, No. 10. - Page 1425-1428.
- [24] Kanguzhin B. E. Completeness and minimality of systems root functions of the differential operator on a piece//the Uzbek mathematical magazine. - 2002. - No. 1. - Page 23-29.
- [25] Langer. (Langer R.). The asymptotic solution of certain linear ordinary differential equations of the second order//*Trans.Amer.Math.Soc.* -1934. - V. 36. - P. 90-106.
- [26] Langer. (Langer R.). The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with spectral reference to a turning point//*Trans.Amer.Math.Soc.* -1949. - V. 67. - P. 461-490.
- [27] Fedoryuk M. V. Asymptotics of solutions of ordinary likneyny differential equation p-go about//*Differents. Equations.* - 1966. - Т. 2, No. 4. - Page 492-507.
- [28] Kostyuchenko A. G. Distribution of own values for singular differential operators//the USSR is GIVEN. - 1960. -Т. 168, NO. 1. - PAGE 21-24.
- [29] Otelbayev M. Estimates of own numbers singular differential operators//*Mathematical notes.* -1976. - Т. 20, No. 6. - Page 859-867.
- [30] Kanguzhin B. E., Sadybekov M. A. Differential operators on a piece. Distribution of own values. - Shymkent: F yly, 1999. - 270 pages.
- [31] Naymark M. A. Linear differential operators. - Moscow: Science, 1969. - 528 pages.
- [32] Titchmarsh E. Ch. Decomposition on own functions, connected with the differential equations of the second order. Т. I. Moscow: Inostr. liter, 1960. - 278 pages.
- [33] Bari N. K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space//*Uch.Zap. MSU.* - 1951. - Т. 4, Issue 148. - Page 69-107.

УДК 517.9

М.И. Ақылбаев,¹ С. Пархатова,² А.Ш. Шалданбаев²

¹Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент

²Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент

О СОВМЕСТНО ПОЛНЫХ ОПЕРАТОРАХ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Полнота и базисность является одним из ключевых понятий спектральной теории операторов. Собственные и присоединенные векторы модельного оператора Штурма-Лиувилля всегда образует полную систему, исключая, вольтероваго случая. Если ограничиться только собственными векторами, то они могут образовать не полную систему, что является следствием наличия кратного спектра оператора. В настоящей работе показано, что совокупность собственных векторов оператора Штурма-Лиувилля и его сопряженного могут образовать полную систему, что является свидетельством наличия у оператора нетривиальных инвариантных подпространств.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, полнота, совместная полнота, инвариантные подпространства, сопряженный оператор.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 98 – 103

UDC 629.195+531.1

**M.D. Shinibaev¹, S.S. Dairbekov², S.A. Zholdasov²,
D.A. Aliaskarov², G.E. Myrzakasova², A.G. Sadybek²**

¹ National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan;

² University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan

PERTURBATIONS SATELLITES FROM THE LIGHT PRESSURE IN THE DELAUNAY ELEMENTS

Annotation. Canonical Delaunay osculating elements have been introduced to ensure that the right sides of the differential equations of perturbed motion, determine the osculating elements there was no terms proportional to the time [1, p. 693].

This article shows that this property is preserved in the case of non-gravitational perturbations of nature. In the [2, p. 63] it is noted that the first group of Delaunay elements is “slow” and the second – “fast”. But this is true only for the gravitational perturbations. It will be shown that in the case of non-gravitational perturbations of all the elements expert Delaunay “ ℓ ” may be “slow”. This is very important because the slow variables can be considered constant in the first approximation.

Following Delaunay take further:¹

$$H = \alpha_2, \quad G = \alpha_3, \quad h = \beta_2, \quad g = \beta_3, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (1)$$

In this article, the beginning of a new shadow less theory that allows preliminary assessment of the strength of the perturbation satellite pressure of light in osculating elements matter when eccentricity exceeds the limit of the Laplace for eccentricity

$$e > e_{\bar{e}} = 0,662743 \dots$$

This is true to this day in space flight dynamics.

Key words: Earth satellite, Delaunay elements, the light pressure, Perturbations from the light pressure, distant satellites, orbital motion, shadow less theory

УДК 629.195+531.1

**М.Д. Шинибаев¹, С.С. Даирбеков², С.А. Жолдасов²,
Д.А. Алиаскаров², Г.Е. Мырзакасова², А.Ж. Садыбек²**

¹Национальный центр космических исследований и технологий, г. Алматы, Казахстан;

²Университет Сыр-Дария, г. Джетысай, Казахстан;

ВОЗМУЩЕНИЯ СПУТНИКА ЗЕМЛИ ОТ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ДЕЛОНЕ

Аннотация. Канонические оскулирующие элементы Делоне были введены для того, чтобы в правых частях дифференциальных уравнений возмущенного движения, определяющих оскулирующие элементы, не было членов, пропорциональных времени [1, с. 693].

В данной статье показано, что это свойство элементов сохраняется и в случае возмущений негравитационной природы. В [2, с. 63] отмечено, что первая группа элементов Делоне L, G, H относятся к разряду

«медленных», а вторая ℓ, g, h относятся к разряду «быстрых» переменных. Но это справедливо только для гравитационных возмущений. Ниже будет показано, что в случае негравитационных возмущений все элементы Делоне, кроме « ℓ », могут оказаться «медленными». Это очень важно, так как в первом приближении медленные переменные можно считать постоянными.

Следуя Делоне, имеем*:

$$H = \alpha_2, G = \alpha_3, h = \beta_2, g = \beta_3, \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (1)$$

В данной статье положено начало новой бестеневой теории, которая позволяет предварительно оценить возмущения спутника от сил светового давления в оскулирующих элементах Делоне в случае, когда эксцентриситет орбиты превышает предел Лапласа по эксцентриситету

$$e > e_{\text{Л}} = 0,662743 \dots$$

Это актуально по сей день в динамике космического полета.

Ключевые слова: спутник Земли, элементы Делоне, световое давление, возмущения от светового давления, далекий спутник, движение орбитальное, бестеневая теория.

1. Введение

Пусть ИСЗ, относящийся к разряду далеких ИСЗ, совершает возмущенное движение в поле тяготения Земли и сил светового давления Солнца. Тогда силовая функция для спутника любой формы в пределах бестеневой теории можно представить так:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} \nu r^2 - \frac{3}{2} \nu z^2, \quad (2)$$

где r – модуль радиуса-вектора ИСЗ; z – аппликата ИСЗ; коэффициент ν подбирается так, чтобы движения узла и перицентра орбиты ИСЗ совпадали с наблюдениями (рис. 1).

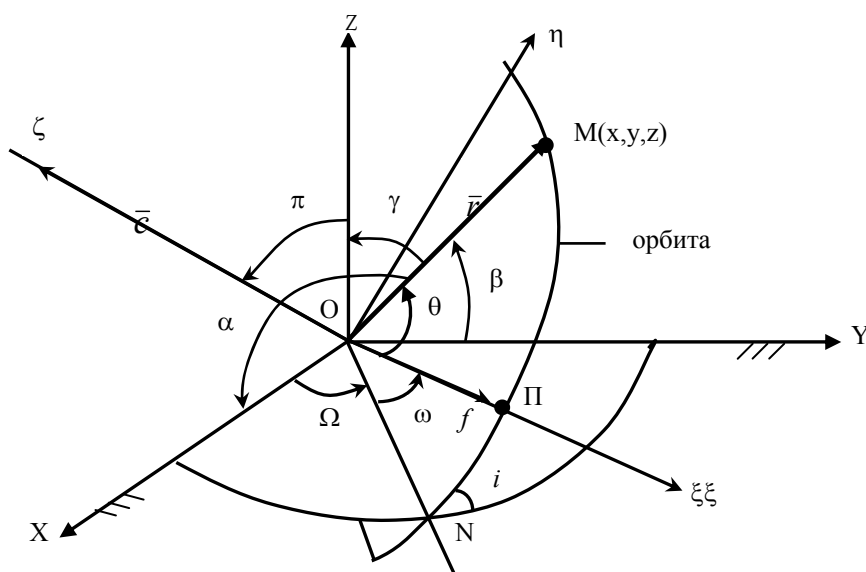


Рисунок 1 - К постановке задачи

На рис. 1 обозначено через M – ИСЗ, N – узел орбиты, Π – перицентр, XYZ – геоцентрическая система координат, $O\xi\eta\zeta$ – орбитальная система координат, Ω – долгота восходящего узла, θ – истинная аномалия, $u = \omega + \theta$ – аргумент широты, ω – угловое расстояние перицентра от узла, i –

* Субботин М.Д. Введение в теоретическую астрономию.- М.: Наука, 1968.- 800 с. (см. с. 655).

наклон орбиты, \bar{c} – постоянная интеграла площадей, $\bar{c} \perp O\xi\eta$, $O\xi$ – ось направления на перигецентр, \bar{r} составляет с координатами X, Y, Z соответственно, углы $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Эти углы определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_0 &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \cos \beta_0 &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \cos \gamma_0 &= \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. Переход к оскулирующим элементам Делоне

Делоне предложил элементы [1, с. 693]

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, \\ \ell &= n(t-\tau), \quad g = \pi - \Omega, \quad h = \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где τ – время прохождения через перигецентр, μ – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального тела и ИСЗ, a – большая полуось эллиптической орбиты, n – среднее движение, π – долгота перигецентра, L, G, H – медленные переменные, ℓ, g, h – быстрые переменные (предположительно).

Переменным Делоне соответствуют следующие канонические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \ell}, \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial g}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial h}, \\ \frac{d\ell}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial G}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где функция Гамильтона имеет вид

$$R' = \frac{\mu^2}{2L^2} + R, \quad (6)$$

здесь R – возмущающая функция.

Переменные Делоне связаны с кеплеровскими элементами следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{L^2}{\mu}, \quad e = \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L} = \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2}, \quad \cos i = \frac{H}{G}, \quad \Omega = h, \quad \pi = g + h, \\ \tau &= t - \frac{\ell}{n}, \quad p = \frac{G^2}{\mu}, \quad \omega = g, \quad p = a(1-e^2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Возмущающая функция из (2)

$$R = \frac{1}{2}vr^2 - \frac{3}{2}vz^2. \quad (8)$$

Перейдем в (6) к переменным Делоне

$$R' = \frac{\nu}{2} \left[\frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} \cos \theta} \right]^2 \cdot \left[1 - 3 \sin^2(\theta + g) \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) \right] + \frac{\mu^2}{2L^2}. \quad (9)$$

С учетом (9) перепишем (5)

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad L = \text{const}, \quad (10)$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{3v}{2} \left[\frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} \cos \theta} \right]^2 \cdot \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \sin 2(\theta + g), \quad (11)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{3v}{2} \left[\frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} \cos \theta} \right]^2 \cdot \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \sin 2(\theta + \pi - h), \quad (12)$$

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} - v \left[1 - 3 \sin^2(\theta + g) \cdot \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \right] \cdot \frac{G^4}{\mu^2} \cdot \frac{\left(\frac{G^2}{L^3}\right) \cos \theta}{\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} \cos \theta\right]^3 \sqrt{1 - \left(\frac{G^2}{L^2}\right) \cos \theta}}, \quad (13)$$

$$\frac{dg}{dt} = - \left\{ \frac{\frac{G^3}{\mu^2} \cdot \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} + \left(2 - \frac{G^2}{L^2}\right) \cos \theta \right] \cdot \left[1 - 3 \sin^2(\theta + g) \cdot \left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right) \right]}{\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} \cos \theta\right]^3 \sqrt{1 - \left(\frac{G^2}{L^2}\right) \cos \theta}} + \frac{dh}{dt} \right\} \cdot \frac{v}{2}, \quad (14)$$

$$\frac{dh}{dt} = -3v \left[\frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} \cos \theta} \right]^2 \cdot \frac{H^2}{G^2} \sin^2(\theta + g). \quad (15)$$

В уравнениях (10)-(15) перейдем в левых частях от t к θ [3, с. 199], используя формулу

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{dA}{dt} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (16)$$

где A – любой элемент из L, G, H, ℓ, g, h .

В правых частях этих же уравнений перейдем к кеплеровским переменным, используя (7). Учитывая, что $v = O(10^{-8} - 10^{-10})$, из (10)-(13) делаем заключение о том, что ℓ – быстрая переменная, а остальные L, G, H, g, h – медленные переменные.

Исходя из этого, следуя Делоне, примем:

$$\alpha_2 = G, \quad \alpha_3 = H, \quad \beta_2 = g, \quad \beta_3 = h, \quad (17)$$

так как в первом приближении медленные переменные можно считать постоянными величинами. Поэтому интегрирование дифференциальных уравнений (11)-(15) от нуля до верхних переменных пределов дает следующие решения:

$$G = -\frac{3\nu}{2}G_0 \{ [G_{00} + eG_{01} + e^2G_{02}] + (e_2G_{12})\theta + (G_{20} + e^2G_{22})\cos 2(\theta + \beta_2) + e^2G_{32} \cos(4\theta + 2\beta_2) + (eG_{41} + e^2G_{42})\cos(\theta + 2\beta_2) + eG_{51} \cos(3\theta + 2\beta_2) \}, \quad (18)$$

где

$$G_{00} = \frac{1}{2}\cos 2\beta_2, \quad G_{01} = -\frac{8}{3}\cos 2\beta_2, \quad G_{02} = \frac{15}{3}\cos 2\beta_2, \quad G_{12} = \frac{5}{2}\sin 2\beta_2, \quad G_{20} = -\frac{1}{2}, \\ G_{22} = -\frac{1}{4}, \quad G_{32} = -\frac{5}{8}, \quad G_{41} = 2, \quad G_{42} = -1, \quad G_{51} = \frac{2}{3}, \quad H = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}G; \quad (19)$$

$$\ell = \{ [m_{00} + em_{01} + e^2m_{02}] + (m_0\theta) + [m_{11}e\sin \theta + m_{12}e^2 \sin 2\theta] \} - \\ -\frac{\nu}{e} \{ (m_{20} + e^2m_{22})\theta + m_{30} \sin 2(\theta + \beta_2) + m_{41}e\sin \theta + m_{52}e^2 \sin 2\theta + m_{61}e\sin(\theta + \beta_2) + \\ + m_{71}e\sin(3\theta + \beta_2) + m_{82}e^2 \sin(4\theta + 2\beta_2) + m_{91}e\sin(\theta + 2\beta_2) + m_{101}e\sin(3\theta + 2\beta_2) + \\ + m_{112}e^2 \sin(2\theta + \beta_2) + m_{122}e^2 \sin(4\theta + \beta_2) \}, \quad (20)$$

где

$$m_{00} = -\frac{3}{4}m_1 \sin 2\beta_2, \quad m_{01} = m_1(6 \sin \beta_2 + 2 \sin 2\beta_2), \quad m_{02} = -\frac{45}{16}m_1 \sin \beta_2, \\ m_{11} = -2m_0, \quad m_{12} = \frac{3}{4}m_0, \quad m_{20} = -\frac{1}{2}m_1, \quad m_{22} = m_1 \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\cos 2\beta_2 - 1 + \frac{3}{2}\cos \beta_2 \right), \\ m_{30} = \frac{3}{4}m_1, \quad m_{41} = \frac{5}{2}m_1, \quad m_{52} = -\frac{3}{2}m_1, \quad m_{61} = -\frac{9}{4}m_1, \quad m_{71} = -\frac{3}{4}m_1, \\ m_{82} = \frac{9}{16}m_1, \quad m_{91} = -\frac{3}{2}m_1, \quad m_{101} = -\frac{1}{2}m_1, \quad m_{112} = \frac{9}{4}m_1, \quad m_{122} = \frac{9}{4}m_1. \\ h = -\nu h_0 \{ (h_{00} + h_{02}e^2)\theta + h_{11}e\sin \theta + h_{22}e^2 \sin 2\theta + h_{32}e^2 \sin 2(\theta + \beta_2) + h_{41}e\sin(\theta + \beta_2) + \\ + h_{51}e\sin(3\theta + \beta_2) + h_{62}e_2 \sin(4\theta + \beta_2) - (H_{01}e + H_{02}e^2) \}, \quad (21)$$

где

$$h_{00} = 1, \quad h_{02} = \left(2 + \frac{5}{2}\cos \beta_2 \right), \quad h_{11} = -4, \quad h_{22} = \frac{5}{2}, \quad h_{32} = 2, \quad h_{41} = 2, \quad h_{51} = \frac{2}{3}, \\ h_{62} = \frac{5}{8}, \quad H_{01} = (h_{41} + h_{51})\sin \beta_2, \quad H_{02} = h_{32} \sin 2\beta_2 + h_{62} \sin \beta_2. \\ \pi = -\frac{\nu}{e}\pi_0 \{ (\pi_{00} + e\pi_{01} + e^2\pi_{02}) + (\pi_{10} + e^2\pi_{12})\sin \theta + (\pi_{21}e + \pi_{22}e^2)\sin 2\theta + \\ + \pi_{31}e\sin 2(\theta + \beta_2) + (e\pi_{41} + e^2\pi_{42})\sin(4\theta + 2\beta_2) + (\pi_{50} + e^2\pi_{52})\sin(\theta + 2\beta_2) \}, \quad (22)$$

где

$$\pi_0 = \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{2\alpha_2^2} \right) \cdot \frac{a\sqrt{\mu a}}{2n}, \quad \pi_{00} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\sin 2\beta, \quad \pi_{01} = \frac{9}{16}\sin 2\beta_2, \quad \pi_{02} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\sin 2\beta_2, \\ \pi_{10} = \gamma, \quad \pi_{12} = 2\gamma, \quad \pi_{21} = -\frac{5}{4}\gamma, \quad \pi_{22} = -5\gamma, \quad \pi_{31} = -\frac{1}{4}, \quad \pi_{41} = -\frac{5}{16}, \quad \pi_{42} = -\frac{5}{4}, \\ \pi_{50} = -\frac{1}{2}, \quad \pi_{52} = -1,$$

далее можно воспользоваться равенством

$$g = \pi - h. \quad (23)$$

3. Выводы

3.1 Главная ценность результатов заключается в том, что они пригодны при любом эксцентриситете $e > e_{\bar{e}} = 0,662743\dots$, где $e_{\bar{e}}$ – предел Лапласа по эксцентриситету.

3.2 Орбита ИСЗ медленно поворачивается вокруг оси Oz по закону (21), перицентр орбиты медленно поворачивается против хода стрелки часов вокруг оси Oz по закону (23). Из (20) следует, что ИСЗ совершает быстрое движение по орбите, которая совершает медленные перемещения в пространстве $OXYZ$, причем большая полуось орбиты остается постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.-М.: Наука, 1968.- 799 с.
 [2] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесных тел.- М.: Наука, 1983.- 351 с.
 [3] Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики.- М.-Л.: Наука, 1965.- 367 с.

REFERENCES

- [1] Dubochin G.N. Nebesnaya mehanika. Osnovnye zadachi i metody.- M.: Nauka, 1968.- 799 s. (in Russ).
 [2] Dubochin G.N. Nebesnaya mehanika. Metodi teorii dvizheniya iskusstvennih nebesnih tel.- M.: Nauka, 1983.- 351 s. (in Russ).
 [3] Chebotarev G.A. Analiticheskie i chislennye metody nebesnoy mehaniki.- M.-L.: Nauka, 1965.- 367 s. (in Russ).

ӘОЖ: 629.195+531.1

**М.Д. Шыныбаев¹, С.С. Даирбеков², С.А. Жолдасов²,
 Д.Р. Алиасқаров², Г.Е. Мырзақасова², А.Ж. Сәдібек²**

¹Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы, Алматы қ., Қазақстан;
²Сыр-Дария университеті, Жетысай қ., Қазақстан

ЖЕРДІҢ ЖАСАНДЫ СЕРІГІНІҢ СӘУЛЕ ҚЫСЫМЫНАН АЛҒАН ҰЙЫТҚУЫН ДЕЛОНЕ ЭЛЕМЕНТТЕРІНДЕ ЕСЕПКЕ АЛУ

Аннотация. Делоненің элементтерін енгізгенде оскуляциялық элементтердің дифференциалдық теңдеулерінің оң жағында уақытқа пропорционал мүшелер пайда болмайды [1, б. 693]. Бұл қасиет гравитациялық емес ұйытқуларда да сақталады. [2, б. 63] Делоненің бірінші топтағы элементтері L, G, H «баяу», ал екінші топтағылары l, g, h – «жылдам» өзгереді делінген. Бірақ бұл тек гравитациялық жағдайда ғана орынды екен.

Мақалада бұл дәлелденді және l -ден басқа элементтердің бәрі «баяу» болуы анықталады.

Бұл өте құнды қасиет, өйткені оларды алғашқы шешімде тұрақты деп есептеуге болады.

Делоне бойынша:¹

$$H = \alpha_2, \quad G = \alpha_3, \quad h = \beta_2, \quad g = \beta_3, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (1)$$

Мақалада көлеңкесіз жаңа теорияға бастама жасалды. Ол жеңіл жолмен Жер серігінің сәуледен алған ұйытқуын Делоне элементтерінде есептелінді және шешімдер Лаплас шегіне тәуелсіз болды

$$e > e_{\bar{e}} = 0,662743\dots$$

Бұл жағдай осы күнде де ғарыштық ұшу динамикасында актуалды.

Тірек сөздер: Жер серігі, Делоне элементтері, сәуле қысымы, сәуле қысымынан алынған ұйытқу, алыс орналасқан Жер серігі, орбиталық қозғалыс, көлеңкесіз теория.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 104 – 109

UDC 532.133, 371.62, 372.8.002

**K.A. Kabyzbekov, H. A. Ashirbaev, ZH. A. Abekova,
G.SH. Omashova, ZH. B. Kydyrbekova, A.I. Dzhumagalieva**
M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan
kenkab@mail.ru

**THE ORGANIZATION OF PERFORMANCE OF COMPUTER
LABORATORY OPERATION ON EXAMINATION
OF THE PHENOMENON OF PALPATION**

Annotation. The model of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of palpation is offered. From the theory, control questions for checkout of readiness of pupils short data are given in operation performance, fact-finding assignments with computer model, the observational, research and creative assignments.

In short data from the theory requirements of occurrence the palpation phenomenon are given: palpation is observed, when two sine waves with identical amplitudes with slightly different frequencies are overlapped in some field of space. It occurs, for example, when two tonometers are inappreciably different on frequency, sound simultaneously. According to a principle of superposition the full bias of particles of the medium, caused by both waves during each moment of time, is equal to the total of the biases caused during the same moment of time by each wave separately. During the certain moments of time of a wave appear in a phase; their maximums coincide, and their amplitudes develop. But during other moments of time there is a phase shift changing in due course. Such moments when the plus peak of one wave coincides with the subzero peak another is possible also. In this case waves quench each other and the net amplitude appears equal to zero. Thus, beats are the alternations of amplitude arising at superimposition of two waves with slightly different frequencies. The beat frequency is equal to a difference of frequencies of two waves.

In fact-finding assignments with computer model are provided embodying of requirements of assignments for models for occurrence of the phenomenon of palpation and definition of a continuance and frequency of palpation.

In the observational and research assignments the finding of the relative tension of strings of musical instruments is offered at the given, certain frequency of sound palpation.

Assignments are given much. Performance all of them to one pupil is unessential. The teacher taking into account ability of pupils can pick up the assignment or offer other similar assignments. Special attention is necessary to convert to performance of research and creative assignments. On the termination of the lesson pupils fill the forms and send by e-mail or immediately hand over to the teacher. At a following lesson the teacher discusses answers and estimates operations.

Keywords: frequency, palpation, amplitude, a phase, a tension, a piano, a violin, dombyra.

ӘОЖ: 532.133, 371.62, 372.8.002

**К.А. Қабылбеков, Х.А. Аширбаев, Ж.А. Абекова,
Г.Ш. Омашова, Ж.Б. Қыдырбекова, А.И. Джумағалиева**
М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ., Қазақстан

**СОҚҚЫ ҚҰБЫЛЫСЫН ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН
КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ
ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ БЛАНКІ ҮЛГІСІ**

Аннотация. Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі ұсынылған. Үлгіде теориядан қысқаша мәліметтер, жұмысты орындауға оқушылардың

дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары, компьютерлік модельмен танысу тапсырмалары, жауабын компьютер арқылы тексеруге арналған есептер, тәжірибелік, зертеулік және творчестволық тапсырмалар қамтылған.

Теориядан қысқаша мәліметтерде соққы құбылысының пайда болуы мен шарттары келтірілген: амплитудалары бірдей, бірақ жиіліктерінде сәл ғана айырмашылық бар екі синусоидалық толқындар кеңістіктің белгілі бір аймағында беттескенде соққы құбылысы байқалады. Мысалы, жиіліктерінде сәл ғана айырмашылық бар екі камертон бірдей уақытта дыбыс шығарғанда соққы құбылысын байқауға болады. Суперпозиция принципіне сәйкес орта бөлшегінің толық ығысуы әр толқыннан туған ығысулардың қосындысына тең болады. Белгілі бір мезетте толқындар фазалары бірдей болып олардың максимумдары сәйкестенеді де амплитудалары қосылады. Ал, басқа бір мезетте уақытқа тәуелді фазалар ығысуы пайда болады. Бір толқынның біреуінің оң шоқтығы мен екіншісінің теріс шоқтығына сәйкес келетін мезеттер де болуы мүмкін. Мұндайда толқындар бір-бірін бәсеңдетіп толық амплитудасы нөлге тең болып қалады. Сонымен соққы дегеніміз жиіліктерінде сәл ғана айырмашылық бар екі толқынның беттесуі нәтижесінде толық амплитуданың периодты өзгеруі. Соққының периоды екі толқынның жиіліктерінің айырмасына тең.

Компьютерлік модельмен танысу тапсырмаларында соққы құбылысы пайда болатын шарттарды іске асыру және соққы периоды мен жиілігін анықтау қарастырылған.

Тәжірибелік және зерттеулік тапсырмаларда белгілі, берілген жиілікте соққы пайда болуы үшін музыкалық аспаптардың ішектерінің салыстырма керілуін анықтау керек.

Тапсырмалар артығымен берілген. Оқытушы оқушының қабілетін ескере отырып таңдап бере алады немесе ұқсас тапсырмалар ұсынуына болады. Оқушылардың зерттеулік және творчестволық тапсырмаларды орындауына аса көңіл аударған жөн. Сабақ соңында оқушылар өздерінің бланкілерін толтырып электронды пошта арқылы немесе оқытушының өзіне тапсыруы керек. Келесі сабақта оқытушы жауаптарды талқылап жұмыстарды бағалайды.

Тірек сөздер: жиілік, соққы, амплитуда, фаза, керілу, фортепиано, қобыз, домбыра.

Қазақстан Республикасының Президенті-Елбасы Н.Ә. Назарбаев ««Қазақстан-2050 стратегиясы» - қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты» атты Қазақстан халқына Жолдауында: Қазақстан 2050 жылы 30 дамыған мемлекеттер қатарына енуі керек деп атап көрсетті. Дамып келе жатқан елдер арасында мұндай қатарда болуы үшін бәсекелестік қатаң болады. Ұлт глобалдық экономикалық бәсекелестікке дайын болғанда ғана мұндай қатарда бола алады. Біз, аса маңызды мақсаттарымызды естен шығармай, мақсатты және шабытты еңбек етуіміз керек: қазіргі заманға сай нәтижелі білім мен денсаулық сақтау жүйесін құру. Бәсекеге қабілетті дамыған мемлекет болу үшін біз сауаттылығы жоғары елге айналуымыз керек. Бізге оқыту әдістемелерін жаңғырту және өңірлік мектеп орталықтарын құра отырып, білім берудің онлайн-жүйелерін белсене дамыту керек болады. Біз қалайтындардың барлығы үшін қашықтан оқытуды және онлайн режимінде оқытуды қоса, отандық білім беру жүйесіне инновациялық әдістерді, шешімдерді және құралдарды қарқынды енгізуге тиіспіз [1].

Президент жолдауында келтірілген тапсырмаларды орындау үшін М.Әуезов атындағы мемлекеттік университетінің «Физиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» кафедрасы соңғы оқу жылдарында оқу үрдісіне «Білімдегі ақпараттық технологиялар», «Физиканы оқытудағы ақпараттық технологиялар» және «Электронды оқулықтарды қолдану әдістемесі» курстарын енгізді. Курстың мақсаты: студент-болашақ физика мұғалімдерін оқу үрдісінде, өздерінің кәсіпшілік қызметінде және біліктілігін жоғарылатуында, оқу үрдісі мен сыныптан тыс жұмыстарды және компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруда болашағы зор білім беру технологияларын творчесволық және тиімді пайдалануға дағдыландыру.

Оқу материалдары базасын жасауда студенттер мен магистранттар белсенді қатыстырылады. Авторлар құрастырған бірқатар демонстрациялық тәжірибелердің компьютерлік модельдерін оқу үрдісінде пайдалану және компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруға арналған бланкі үлгілері туралы біз бұрын жазғанбыз [2-17].

Мақалада студенттерге, магистранттарға, мектеп мұғалімдеріне көмекші құрал ретінде оқушылардың [18] ресурсын пайдаланып «Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастыруда» қандай тапсырмалар беруге болатынын және оқушыларға алдын ала берілетін компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісін ұсынамыз.

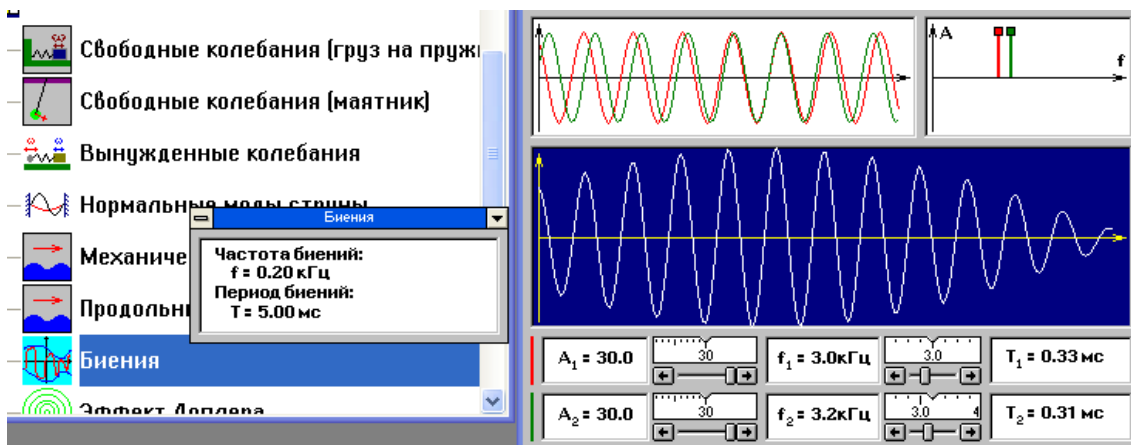
Жұмыс тақырыбы: соққы құбылысын зерттеу.

Жұмыс мақсаты: дыбыс көздерінің қатар дыбыс шығару кезіндегі соққы құбылысын бақылап, дыбыстық соққы жиіліктері мен периодтарын анықтау.

Теориядан қысқаша мәлімет. Амплитудалары бірдей, бірақ жиіліктерінде сәл ғана айырмашылық бар екі синусоидалық толқындар кеңістіктің белгілі бір аймағында беттескенде соққы құбылысы байқалады. Мысалы, жиіліктерінде сәл ғана айырмашылық бар екі камертон бірдей уақытта дыбыс шығарғанда соққы құбылысы байқалады. Суперпозиция принципіне сәйкес орта бөлшегінің толық ығысуы әр толқыннан туған ығысулардың қосындысына тең болады. Белгілі бір мезетте толқындар фазалары бірдей болып олардың максимумдары сәйкестенеді де амплитудалары қосылады. Ал, басқа бір мезетте уақытқа тәуелді фазалар ығысуы пайда болады. Бір толқынның біреуінің оң шоқтығы мен екіншісінің теріс шоқтығына сәйкес келетін мезеттер де болуы мүмкін. Мұндайда толқындар бір бірін бәсеңдетіп толық амплитудасы нөлге тең болып қалады. Сонымен соққы дегеніміз жиіліктерінде сәл ғана айырмашылық бар екі толқынның беттесуі нәтижесінде толық амплитуданың периоды өзгеруі. Соққының периоды екі толқынның

$$f_{\text{НЮ}} = |f_1 - f_2|$$

жиіліктерінің айырмасына тең
Адамның құлағы (5-10) Гц жиіліктегі дыбыстық соққыны қабылдайды. Соққыны тыңдау арқылы музыкалық аспаптарды жөндейді.



1-сурет

Сынып Фамилиясы..... Есімі.....

Оқушылардың жұмысты орындауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары.

- Соққы құбылысын сипаттаңдар. Жауабы:.....
- Соққы периоды қандай шамалармен анықталады. Жауабы:.....
- Қорытынды амплитуданың максимум болу шарты қандай? Жауабы:.....
- Қорытынды амплитуданың минимум болу шарты қандай?. Жауабы:..... 1.

Танысу тапсырмалары.

1.1. Қарама қарсы орналасқан екі дыбыс көздері амплитудалары бірдей $A_1 = A_2 = 30,0$ см, жиіліктері $f_1=3,0$ кГц , $f_2=3,2$ кГц дыбыстарды бір мезетте шығарады. Толқындар беттесуінен пайда болған соққының периоды мен жиілігін анықтаңдар. Жауабы:.....

1.2. Қарама қарсы орналасқан екі дыбыс көздері амплитудалары бірдей $A_1 = A_2 = 30,0$ см, жиіліктері $f_1= 4,4$ кГц , $f_2= 4,8$ кГц дыбыстарды бір мезетте шығарады. Толқындар беттесуінен пайда болған соққының периоды мен жиілігін анықтаңдар. Жауабы:.....

1.3. Қарама қарсы орналасқан екі дыбыс көздері амплитудалары бірдей $A_1 = A_2 = 30,0$ см, жиіліктері $f_1=2,0$ кГц , $f_2=2,2$ кГц дыбыстарды бір мезетте шығарады. Толқындар беттесуінен пайда болған соққының периоды мен жиілігін анықтаңдар. Жауабы:.....

1.4. Қарама қарсы орналасқан екі дыбыс көздері амплитудалары бірдей $A_1 = A_2 = 30,0$ см, жиіліктері $f_1= 4,6$ кГц , $f_2= 4,8$ кГц дыбыстарды бір мезетте шығарады. Толқындар беттесуінен пайда болған соққының периоды мен жиілігін анықтаңдар. Жауабы:.....

2. Тәжірибелік есептер.

2.1. Фортепианоның екі ішегінің бірдей керілуінде шығаратын негізгі жиілігі $f_1 = 4,40$ кГц. Ішектің біреуінің қандай салыстырма $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - керілуінің төмендеуінде (әр ішектің екеуінің де дыбыс шығаруында) дыбыстық соққының жиілігі $f_{\text{соққы}} = 2,2$ кГц болады? Жауабы:.....

2.2. Сыбызғының екі ішегінің бірдей керілуінде шығаратын негізгі жиілігі $f_1 = 2,40$ кГц. Ішектің біреуінің қандай салыстырма $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - керілуінің төмендеуінде (әр ішектің екеуінің де дыбыс шығаруында) дыбыстық соққының жиілігі $f_{\text{соққы}} = 4,2$ кГц болады? Жауабы:.....

2.3. Домбыраның екі ішегінің бірдей керілуінде шығаратын негізгі жиілігі $f_1 = 4,20$ кГц. Ішектің біреуінің қандай салыстырма $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - керілуінің төмендеуінде (әр ішектің екеуінің де дыбыс шығаруында) дыбыстық соққының жиілігі $f_{\text{соққы}} = 0,2$ кГц болады?

2.4. Қобыздың екі ішегінің бірдей керілуінде шығаратын негізгі жиілігі $f_1 = 4,40$ кГц. Ішектің біреуінің қандай салыстырма $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - керілуінің төмендеуінде (әр ішектің екеуінің де дыбыс шығаруында) дыбыстық соққының жиілігі $f_{\text{соққы}} = 2,2$ кГц болады? Жауабы:.....

3. Зерттеу тапсырмалары.

3.1. Аспаптың екі ішегінің шығаратын негізгі жиіліктері бірдей. Екеуі бірдей дыбыс шығарғанда дыбыстық соққы периодтары негізгі дыбыс периодтарынан 10 есе аз болуы үшін аспаптардың негізгі жиіліктерінің айырмашылығы қандай болуы керек. Осы шартты тәжірибеде іске асырып нәтижесін компьютермен тексеріңдер. Жауабы:....

3.2. Фортепианоның екі струнасының керілуі бірдей кезіндегі негізгі жиілігі $2,0$ кГц. Дыбыстары бірдей шыққанда струнаның біреуінің қандай $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - салыстырма керілуінде дыбыстық соққы жиілігі $f_{\text{соққы}} = 1,0$ кГц болады? Тәжірибеде іске асырыңдар. Жауабы:....

3.3. Домбыраның екі ішегінің керілуі бірдей кезіндегі негізгі жиілігі $3,0$ кГц. Дыбыстары бірдей шыққанда ішектің біреуінің қандай $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - салыстырма керілуінде дыбыстық соққы жиілігі $f_{\text{соққы}} = 1,0$ кГц болады? Тәжірибеде іске асырыңдар. Жауабы:....

3.4. Қобыздың екі ішегінің керілуі бірдей кезіндегі негізгі жиілігі $5,0$ кГц. Дыбыстары бірдей шыққанда ішектің біреуінің қандай $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - салыстырма керілуінде дыбыстық соққы жиілігі $f_{\text{соққы}} = 3,0$ кГц болады? Тәжірибеде іске асырыңдар. Жауабы:....

3.5. Қобыздың екі ішегінің керілуі бірдей кезіндегі негізгі жиілігі $5,0$ кГц. Дыбыстары бірдей шыққанда ішектің біреуінің қандай $\Delta\dot{O}/\dot{O}$ - салыстырма керілуінде дыбыстық соққы жиілігі $f_{\text{соққы}} = 0,40$ кГц болады? Тәжірибеде іске асырыңдар. Жауабы:....

3.2. 2.1.- 2.4. есептерінің нәтижелерін сараптап қорытынды жасандар. Қорытынды:.....

4. Творчестволық тапсырмалар.

4.1. 2.1-2.4. есептеріне ұқсас есептер құрастырыңдар. Қорытынды:.....

Орындалған тапсырмалар саны	Қателер саны	Сіздің бағалауыңыз

Бланкіде тапсырмалар саны артығымен берілген. Бір оқушы олардың барлығын орындауы шарт емес. Мұғалім ұсынылған тапсырмалар ішінен іріктеп оқушының шамасына қарай бергені дұрыс, немесе басқа да тапсырмалар ұсынуына болады.

ӘДЕБИЕТ

[1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.

[2] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. Томск 2011г., С 210-215.

[3] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Оқушылардың өз бетінше атқаратын компьютерлік зертханалық жұмыс бланкісінің үлгісі. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.

[4] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е. Абдураимов Фотозэффект, комптонэффекті зандылықтарын оқытуда компьютерлік үлгілерді қолданудың әдістемесі, компьютерлік зертханалық жұмыс атқаруға арналған бланкі үлгілері. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 114-121.

[5] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова, Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Жинағыш және шашыратқыш линзаларды үлгілеу тақырыбына сабақ өткізу үлгісі. Известия НАН РК, серия физ-мат.№2, Алматы, 2014, С. 286-294.

- [6] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П. А, Рүстемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Жарықтың дифракциясын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [7] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева, Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Зарядталған бөлшектердің магнит өрісінде қозғалысын және масс-спектрометр жұмысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., №1(299), Алматы, 2015, С 80-87..
- [8] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А, Саидахметов, П А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Ньютон сақиналарын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Жарықтың интерференция құбылысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Допплер эффектін зерттеуге арналған компьютерлік жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, секция физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [11] Кабылбеков К.А. Физикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру. Оқу құралы. Шымкент қ., 2015, 284 с.
- [12] Кабылбеков К.А. Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43:
- [13] Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию работы селектора скорости. Современные наукоемкие технологии, №6, Москва, 2015, С19-21.
- [14] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С. Сүйеркұлова Ж.Н. Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН серия физ. мат №2 2016г. С84-91.
- [15] Кабылбеков К.А., Саидахметов П. А., Омашова Г.Ш. Нуруллаев, М.А. Артыгалин Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя совершающего цикл Карно. Изв. НАН серия физ мат №2 2016г. С98-103.
- [16] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Аширбаев Х.А., Абдубаева Ф.И., Досканова А.Е., Исследование работы газа на компьютерной модели. Вестник НАН №2 2016г. С83-88.
- [17] Кабылбеков К.А., Саидахметов А.А. Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И. Қозыбақова Г.Н. Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв НАН серия физ. мат №2 2016г. С92-97.
- [18] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1».2001.

REFERENCES

- [1] Nazarbayev N.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012г.
- [2] Kabyzbekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011г., P.210-215.
- [3] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P82-89.
- [4] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P114-121.
- [5] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P286-294.
- [6] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova Г.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P71-77.
- [7] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva SH.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), 2015, P80-87.
- [8] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A, Saidahmetov, П А, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, № 1 (299), 2015, P14-20.
- [9] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, 2015, P131-136
- [10] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, 2015, P155-160.
- [11] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. 2015 , 284 p.

[12] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, 2015. P40-43.

[13] Kabyzbekov K.A., Models of the form of the organisation of computer laboratory work on research of the selector of speds. Modern high technologies. №6, Moscow, 2015, P19-21.

[14] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P.A., Omashova G.SH, Serikbaeva G.S., Sujerkulova ZH. N. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P84-91.

[15] Kabyzbekov K.A., Omashova G.SH., Saidahmetov P.A., Nurullaev M. A., Artygalin N.A. Models of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the Carnot cycle. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P98-103.

[16] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P.A., Ashirbaev H.A., Abdubaeva P.H.I., Doskanova A.E.

Examination of operation gaz on computer model. The bulletin of NAN RK №2 2016г. P83-88.

[17] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P.A., Omashova G.SH, Suttibaeva D.I., Kozybakova G. N. Model of the form of the organization of computer laboratory operation of isobaric process. News NAN RK, series physical-mat., № 2, 2016, P92-97.

[18] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1".2001.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**К.А. Кабылбеков, Х.А. Аширбаев, Ж.А. Абекова,
Г.Ш. Омашова, Ж.Б. Кыдырбекова, А.И. Джумагалиева**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Қазақстан

ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЯВЛЕНИЯ БИЕНИЯ

Аннотация. Предлагается модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения. Приводятся краткие сведения из теории, контрольные вопросы для проверки готовности учащихся к выполнению работы, ознакомительные задания с компьютерной моделью, экспериментальные, исследовательские и творческие задания.

В кратких сведениях из теории приведены условия возникновения явления биения: биение наблюдается, когда две синусоидальные волны с одинаковыми амплитудами со слегка отличающимися частотами перекрываются в некоторой области пространства. Это происходит, например, когда два камертона, несущественно отличающиеся по частоте, звучат одновременно. В соответствии с принципом суперпозиции полное смещение частиц среды, вызываемое обеими волнами в каждый момент времени, равно сумме смещений, вызываемых в тот же момент времени каждой волной в отдельности. В определенные моменты времени волны оказываются в фазе; их максимумы совпадают, и их амплитуды складываются. Но в другие моменты времени возникает фазовый сдвиг, изменяющийся со временем. Возможны и такие моменты, когда положительный пик одной волны совпадает с отрицательным пиком другой. В этом случае волны гасят друг друга и суммарная амплитуда оказывается равной нулю. Таким образом, биения есть периодические изменения амплитуды, возникающие при наложении двух волн со слегка отличающимися частотами. Частота биений равна разности частот двух волн.

В ознакомительных заданиях с компьютерной моделью предусмотрены реализация условий заданий на модели для возникновения явления биения и определение периода и частоты биения.

В экспериментальных и исследовательских заданиях предлагается нахождение относительных натяжений струн музыкальных инструментов при заданной, определенной частоте звукового биения.

Задания даны с избытком. Выполнение их всех одному ученику необязательно. Преподаватель может с учетом способности учащихся подобрать задания или предложить другие подобные задания. Особое внимание надо обратить выполнению исследовательских и творческих заданий. По окончании урока учащиеся заполняют свои бланки и отправляют по электронной почте или непосредственно сдают учителю. На следующем уроке преподаватель обсуждает ответы и оценивает работы.

Ключевые слова: частота, биение, амплитуда, фаза, натяжение, фортепиано, скрипка, домбыра.

Сведения об авторах:

Кабылбеков К.А. - канд. физ.мат. наук, доцент кафедры «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. М.Ауэзова;

Аширбаев Х.А. - канд. физ.мат. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика» ЮКГУ им.М.Ауэзова;

Абекова Ж.А. - канд. физ.мат. наук, доцент кафедры «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. М.Ауэзова;

Омашова Г.Ш. - канд. физ.мат. наук, доцент кафедры «Физика» ЮКГУ им. М.Ауэзова;

Кыдырбекова Ж.Б. –учитель физики школы интернат для одаренных детей им. М. Тасовой ;

Джумагалиева А.И. - магистр, старший преподаватель кафедрой «Высшая математика» ЮКГУ им. М.Ауэзова

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 110 – 115

UDC 622.011.4+622.023

Zh.Zh.Kozhamkulova, N.Amankeldikyzy, D.A.Kabaeva

Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty
ekojaz@mail.ru, ona08111988@mail.ru, Dinara.kabaeva@list.ru

**INFORMATION TECHNOLOGY USED IN THE PREPARATION
OF FUTURE TEACHERS AND THEIR DEVELOPMENT**

Annotation. One of the urgent problems of Kazakhstan's society is the formation of a competitive personality, ready not only to live in a changing social and economic conditions, but also to actively influence the existing reality, changing it for the better. In this regard, certain requirements for such personality - creative, active, social responsibility, possession of a developed intellect, high professional level of literacy, sustainable motivation of cognitive activity – are to the foreground.

One of the priorities of educational policy is a reorientation of the educational process on the competence approach. Further development of the highest national education remains one of the priorities of state policy. Urgent is to improve the quality of training highly skilled and competitive personnel for all sectors of the economy, creating the conditions for the training of highly qualified teachers of the new formation, able to work under the conditions of innovation, informatization of education. Of course, that full integration into the world educational space requires a raising of the education system to the international level.

Keywords: future teachers, information technology, teacher and technique.

ӘОЖ: 622.011.4+622.023

Ж.Ж. Қожамқұлова, Н.Аманкелдіқызы, Д.А. Кабаева

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

**БОЛАШАҚ МҰҒАЛІМДЕРДІ КӘСІБИ ДАЙЫНДАУДА
ҚОЛДАНЫЛАТЫН АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР
ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ДАМУ БОЛАШАҒЫ**

Аннотация. Қазіргі кездегі қоғамды ақпараттандыру жағдайында маман даярлаудың жалпы мақсаты - ақпараттық-компьютерлік технология құралдарының барлық мүмкіндігін қолдану қабілеттілігіне даярлау арқылы үздіксіз білім беру бағытын қалыптастыру, тұлғаның білім беруді ақпараттандыру саласынан білім алу қажеттіліктерін қанағаттандыру болып табылады. Ақпараттық технологияның келесі кластарын атап көрсетуге болады:

- ауқымды ақпараттық технология, ол қоғамда ақпараттық қорларды қалыптастыру мен қолданудың модельдері, әдістері мен құралдарын қамтиды;
- базалық ақпараттық технология, ол қолданудың белгілі бір аймағына бағытталады (өндіріс, ғылыми зерттеу, жобалау, оқыту);
- нақты ақпараттық технологиялар, ол қолданушының нақты есептерінде мәліметтерді өңдеуді қамтиды.

Жаңа ақпараттық технологиялар деп жаңа білімдерді қалыптастыру үшін адамның есептеу ортасына тікелей интеллектуальды тұрғыда енудегі мәліметтерді өңдеу модельдерінің, әдістерінің және құралдарының жиынтығы болып табылады. Ақпараттық технологиялар жеке тұлғаның алдында тұрған міндеттерді орындау барысында оның қажеттіліктерін қанағаттандыру құралы болып отыр.

Тірек сөздер: болашақ мұғалімдер, ақпараттық технология, оқытушы, әдіс.

Ақпараттық технология [1] еңбекте көрсетілгендей ақпараттық үдерістердің өзара әрекеттесуі негізінде іске асырылады және оларды ұйымдастырудың мына түрін қарастыруы тиіс, яғни олар аутоматтандырылған түрде бірыңғай жүйе ретінде ұйымдастырылады. Сонымен ақпараттық жүйе - жүйе ретінде, яғни жасау объектісі ретінде қарастырылуы мүмкін. Бір мезгілде ол жаңа жүйелерді құру және жобалау құралы бола алады. Бұл кезде ақпараттың жоғарғы қолданушы деңгейі көрініс береді [1, 90 б].

И.Роберттің айтуынша, жаңа ақпараттық технология – есептеуіш техника негізінде қызмет ететін бағдарламалақ құрылғылар, сонымен бірге ақпаратты таратуды, өндеуді, сақтауды, жинақтауды қамтамасыз ететін құралдар мен ақпарат айырбастау жүйелері болып табылады [2].

«Ақпараттық технология» ұғымының көпмәнділігі мен көп қырлы болуына байланысты бұл ұғымды ішкі ұғымдарға ажырату, оның кейбір қырларын нақтылау арқылы құрылымдау қажет болады. Сонымен ақпараттық технологияның келесі кластарын атап көрсетуге болады:

- ауқымды ақпараттық технология, ол қоғамда ақпараттық қорларды қалыптастыру мен қолданудың модельдері, әдістері мен құралдарын қамтиды;
- базалық ақпараттық технология, ол қолданудың белгілі бір аймағына бағытталады (өндіріс, ғылыми зерттеу, жобалау, оқыту);
- нақты ақпараттық технологиялар, ол қолданушының нақты есептерінде мәліметтерді өндеуді қамтиды.

Жаңа ақпараттық технологиялар деп «жаңа білімдерді қалыптастыру үшін адамның есептеу ортасына тікелей интеллектуалды тұрғыда енудегі мәліметтерді өңдеу модельдерінің, әдістерінің және құралдарының жиынтығы түсіндіріледі» [1, 89 б].

Көптеген мамандар қазіргі мезеттегі кәсіби бағыттағы құралдарда кеңінен қолданылатын жобалауды аутоматтандырудың әртүрлі құралдарының маңыздылығын атап көрсетеді. Атап айтқанда, UML (Unified Modeling Language) тілін Rational Software фирмасы және оның серіктестері корпоративті деңгейде бағдарламалық жүйелер жасайтын фирмалар жасады (Hewlett-Packard, IBM, Microsoft, Oracle және т.б.). UML-Booch'a, OOSE/Jacobson және OMT бағдарламалық архитектураларды визуалды модельдеу тілдерінің ұрпағы. Бірқатар үлкен компаниялар UML тілін ауқымды бағдарламалық жүйелерді жасау барысында үлгі ретінде қолданады. UML тілі бизнес-модельдеу жүргізу үшін, талаптарды басқару үшін, жүйе архитектурасын талдау және жобалау үшін, бағдарламалау және тестілеу үшін қызмет етеді.

Көптеген мамандардың назары бүгінгі таңда ақпараттық жүйелерді жасау мәселелеріне арналады. Ашық жүйелердің әдіснамасын қолдану сыртқы әсерлерге бейімдеуге қабілетті иілгіш (икемді) жүйелерді жасауды ұсынады. Қазіргі заманғы ақпараттық жүйелер әртүрлі бағыттағы өзара әрекеттесетін ішкі жүйелерден: білімді басқару ішкі жүйелері, шешімді талдау және қабылдау ішкі жүйелері (DSS – decision support system), ресурстарды жоспарлау ішкі жүйелері (ERP – enterprise resource planing), сыртқы ақпараттық жүйелермен ақпарат алмасу блогынан тұратын күрделі интеграцияланған кешен болып табылады [3].

Ақпараттық технология құралдарына және оларды оқыту үрдісінде қолдануға оқытуға байланысты неғұрлым қызығушылық тудыратын келесі мәселелерді атап өтейік:

1. АТ мүмкіндіктерін оқыту құралы ретінде тиімді қолдану;
2. Жоғары және орта білім беру шеңберіндегі пәндік сала ретінде, осы құралдардың жылдам қарқынды даму жағдайында АТ құралына оқыту;
3. АТ үлкен мүмкіндіктеріне сәйкес олардың оқыту үдерісінде құралдарын қолдануға қабілетті болашақ мұғалімдерді дайындау;
4. Инновацияларға тез бейімделуге қабілетті АТ пәндік сала ретінде оқытатын мұғалім мамандарды дайындау.

АТ құралдарын қолдану-оқыту үдерісін студенттер білім алып, нақты ортада практикалық іс-әрекеттің нәтижесінде шығармашылық өнімдерін жасайтындай тұрғыда ұйымдастыру мүмкіндігін береді [4, 5]. Ұсынылған технология арқылы білімгерлер қоғамға пайдалы қандай-да бір мәселені шеше бастайды, қандайда бір шешімді іздеуде оны зерттейді.

Ақпараттық технологиялар жеке тұлғаның алдында тұрған міндеттерді орындау барысында оның қажеттіліктерін қанағаттандыру құралы болып отыр. Осы қарастырылған ыңғайды әртүрлі техникалық және бағдарламалық құралдардың көмегімен ақпаратты жинау, ұйымдастыру, ұсыну және талдау үшін белгілі бір ғылым саласын оқып үйрену барысында қолдану мақсатқа сай келеді.

Студенттер білімді конструкциялауда және оған жауапты болғанда ғана олардың оқуға деген мотивациясы арта түседі. Ақпаратты талдауға және қорытынды жасауға көмектесе ғана білімгерлер үшін оқыту нәтижелері неғұрлым мәнді болып табылады.

Ақпараттық технологиялар оқыту үдерісінде ақпаратты жинау, ұйымдастыру және сақтау үшін шығармашылық есептерді шешу, шешім қабылдау, тәжірибе алмасу, өздерінің нәтижелерін ұсыну үшін қолдануға қажет. Нәтижелерді интеграциялау үшін мәліметтер қорын электронды кестелерді, мәтіндік және графикалық редакторларды қолдануға болады. Электронды пошта тәжірибелерімен алмасу, қосымша мәліметтер алу мүмкіндігін береді. Білімгерлердің шығармашылық іс-әрекеттері үдерісінде алғашқы болжамға қарама қайшы келетін нәтижелер алынуы мүмкін, бұл оларда неғұрлым жоғары деңгейдегі ойлау операцияларының: классификация, синтез, анализ алдын-ала болжау, құру дамуына ықпал жасайды.

АТ құралдары оқытудың алға қойылған мақсаттарға жету дәрежесін стандартты сабақтардың көмегімен емес, неғұрлым ашық құралдар жүйесінің көмегімен анықтау мүмкіндігін береді.

– орындалған жұмыстардың «портфолиосы» (electronic portfolios) – білімгерлердің дамуын бағалау; алдыңғы қатарлы жұмыстардың жиынтығын құру және әрқайсысының нәтижелерін талдау мүмкіндігін береді;

– студенттік конференциялар, презентациялар – мұғалімге тән саласынан білімдерді тексеру мен қатар, өз ойларын тұжырымдау, сөйлеу іскерліктерін, пікірталасқа қатысуын бағалау мүмкіндігін береді;

– шығарылатын журналдар мұғалімдер мен оқушыларға оқу үдерісінің барысы туралы пікірлермен алмасу мүмкіндігін береді.

Қарастырылып отырған оқыту нәтижелерін бағалау құралдары ХХІ ғасырдың талаптарына сай келеді [6].

Бағалаудың мұндай әдістерінің негізгі мақсаты: білімгерлерде өзін-өзі бағалау және өзін-өзі бақылау дағдыларының дамуына ықпал жасау. Компьютерлерді, видеокамераларды, интерактивті тақталарды және арнайы бағдарламалық қамтамасыздандыруды қолдана отырып олар өз нәтижелерін қайта қарай отырып, соңынан оларға түсінік бере алады.

Осы ыңғайды іске асыру үшін АТ әртүрлі құралдары, соның ішінде графика, дыбыс, видеоны көптеген көздерден пайдаланатын оқу курстары мен практикалық сабақтарды құру үшін гипермәтіндік және мультимедиялы технологиялар қолданылады (HyperCard, ToolBook, HyperStudio (Macintosh), TutorTesh (Apple)).

Бірқатар еңбектерде ақпараттық технологиялар оқытудың әртүрлі формалары мен әдістерін қамтамасыз ету құралы ретінде қарастырылады [7, 8]. Оқыту үдерісінде ұсынылатын білім және дағдыларды қабылдаудың тұлғалық ерекшеліктерінің спецификасын ескеру оқыту тиімділігінің артуына ықпал жасайды. Ақпараттық технологиялар оқытудың формалары мен әдістерін түрлендіру, оларды білімгерді тұлғалық ерекшеліктеріне бейімдеу мүмкіндігін береді.

Мультимедиялы және гипермәтіндік құралдар оқытуды дараландыру үшін әртүрлі мүмкіндіктерді ұсынады. Бір материалды оқып үйрену үшін әртүрлі маршруттар ұсынылуы мүмкін. Оқу үрдісінде оқушылар белгілі бір пән саласында әртүрлі тәсілдермен жұмыс істейді: мультимедиялы құралдарды қолданып олар микроәлемді конструкциялайды, онда олар тәжірибелік жолмен ұсынылатын болжамдарды тексере алады.

АТ құралдарын оқыту үрдісінде қодану жаңа, белгісіз ғылыми тұжырымдарды оқып үйрену қабілетін; шығармашылық қабілетін дамыту; білімгерлердің қойылған оқыту мақсаттарына жету дәрежесі туралы ақпаратты сақтау; білімгерлерде өзіндік оқу және өзіндік бақылау дағдыларын қалыптастыру мүмкіндіктерін береді. Бұл дағдылар дамымалы ақпараттық қоғамда келешек өмір сүруде, тез өзгеруші жағдайларға оларды бейімдеуде үзіліссіз оқыту мен өзіндік оқытуды қамтамасыз ету үшін қажет болады.

Қазіргі кезеңде білімді конструкциялау мен тасымалдаудың жаңа моделін құру үшін алғышарттар жасалған. Ақпараттық технологиялардың мүмкіндіктері оқытудағы кері байланыстардың болуын, білімгердің оқыту үдерісіндегі белсенділігін пәнаралық байланыстардың қамтамасыз етуі тиіс деген Ж.Пежо, С.Пейперт, Л.Выготскийдің пікірлерін дамыту мүмкіндіктерін береді.

Осындай құралдардың бірі ретінде оқыту аспабы ретінде келесі мүмкіндіктері бар WWW технологияларды қолдану ұсынылады, яғни: кең интерактивті мүмкіндіктері; гипермедиа құралдары (гипермәтін және мультимедиа); INTERNET арқылы ақпарат іздеу және алмасу; серверлерге, броузерлер мен көмекші қосымшаларға ену мүмкіндігі.

Бірқатар еңбектерде ХХІ ғасырда білім беру саласында телекоммуникацияларды қолдану болашағы қарастырылады. Қазіргі заманғы телекоммуникациялық жүйелер – тәжірибені тасымалдау тәсілдерін жетілдіру бағытындағы келесі бір қадам болып табылады. Бұл білім мен

тәжірибені жылдам және дұрыс берудің әлеуметтік қажеттіліктерін табиғи тұрғыда іске асыру. Теледидар сияқты телекоммуникациялық желілер де білім беру жүйесінде өз орнын табады. Бұл өте маңызды, әрбіріне жоғары сапалы білім алу мүмкіндігін қамтамасыз етеді.

Көптеген басылымдарда, телекоммуникацияларды оқыту үдерісінде қолданудың психологиялық-педагогикалық аспектілерін қарастыратын салмақты ғылыми зерттеулердің қажеттігі атап көрсетіледі, яғни: «Олардың мүмкіндіктері біздің алдымызда толығымен ашылады, егер біз олардың ішінде жатқан психологиялық негіздеуді, мотивтерді оқып-үйренсек».

Білім беру мекемелерін оқу курстарына интеграцияланатын, жоғары сапалы бағдарламалық қамсыздандырумен қамтамасыз ету қажет: кез келген жастағы білімгерге, ата-аналарға, қызметкерлерге – бүкіл өмір бойын оқыту үдерісі мен өзін-өзі оқытуға қатыстырылған қазіргі ақпараттық қоғамның «ашық оқулық компьютерлік жүйелерді» жасау.

Оқыту үдерісінде мұғалімнің жаңа рөлі анықталады, мұғалім мен білімгердің арасында жаңа қарым-қатынастар орнатылады. Ақпараттық технологиялар білікті және дайындығы жақсы мұғалімдермен қажет уақытта, қажет орында және сәйкесінше ақпараттық ортада қолданылуы керек.

Желілік технологиялар компьютерлік оқытудың маңызды құраушысы болып келеді, олар компьютерлер арасында және адамдар арасында байланыстарды қамтамасыз етеді. Адамдар Internet-ті байланыс үшін, тәжірибе алмасуда үлкен тиімділікпен қолданады. Қашықтан оқыту телекоммуникацияның көмегімен кеңінен қолданылып келеді. Оқыту орнында нақты, физикалық қатысусыз виртуалды университеттер концепциясы дамып келеді.

Оқыту үдерісінде ақпараттық технологияларды тиімді қолдануға байланысты қарастырылған мәселелер, АТ қарқынды дамуы жағдайында оның құралдарына оқыту, оқыту пәні ретінде үлкен өзектілікке айналуға. Microsoft фирмасының бағдарламаларының шеңберінде студенттер мен оқушыларды замани бағдарламалауға оқытуға арналған Internet Distance Education (IDE) жобасы жасалуда. Серверлерде Visual C++, Visual I++ курстары бойынша қосымша ақпараттар келтіріледі.

Қазіргі заманғы бағдарламалау жүйелерінің жылдам даму қарқыны, олардың алуан түрлері, АТ құралдары саласында болып жатқан өзгерістерге жеңіл икемделетін «ашық» оқу курстарын жасау мәселесін қойып отыр.

Ұсынылып отырған оқыту технологиясының басты құраушылары пәндік сала идеологиясына баламалы оқыту мазмұнын құрылымдауға және оқыту үдерісін іске асыру үшін дистанциялы формаларды қолдануға негізделеді. Оқыту мазмұны тәжірибелі оқытушылар мен кәсіби бағдарламашылардың қатысумен жасалады және мыналарды қамтиды: оқулық материал (textbook); студенттің жұмыс дәптері (workbook); оқыту жоспары (study-guide); тестер жинағы (test-engine).

Оқытудың қашықтан оқыту формасы студенттер мен оқушыларға келесі мүмкіндіктерді қамтамасыз етеді: кәсіби бағдарламашылардың басшылығымен бағдарламалау дағдыларын және қашықтан оқыту бағдарламасында жүзеге асырылған олардың тәжірибелерін жетілдіру; қандай-да бір ой қорытуды талап ететін бағдарламалау тілін таңдау; заманауи аспаптық орталарда жұмыс істеу, оқыту үдерісі оқушылардың білім деңгейін тексерумен қатар, қандай да бір құралдың көмегімен нақты шешілетін есептер класы туралы түсінік қалыптастыру мүмкіндігін беретін бақылау тапсырмаларымен толықтырылады. Microsoft фирмасының мамандарынан бағдарламалау тілдері бойынша қосымша көмек алуға болады.

АТ құралдарына оқыту оларды оқыту үдерісінде әртүрлі пәндерде қолдану, білікті мұғалімдерді дайындау мәселелері бойынша көптеген еңбектерге жүргізілген талдаулар келесі қорытындыларды жасау мүмкіндігін береді:

1. АТ құралдарын оқыту мен оларды оқыту үдерісінде қолдануға байланысты сұрақтарға ауқымды назар аударылады; олардың құрал ретінде оқыту үдерісінің тиімділігі мен сапасын көтерудегі үлкен орны ескеріледі; АТ оқыту құралы ретіндегі мәнділігін объективті тұрғыда анықтайтын алғышарттар сипатталады.

2. Қазіргі кезде ақпараттық технологиялардың оқыту құралы ретіндегі мүмкіндіктері толық көлемде қолданылмайтындығы ескеріледі, олардың мүмкіндіктеріне баламалы емес және осындай жағдайдың себептері қарастырылады.

3. Ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы жағдайында олардың құралдарына тиімді оқытуға қабілетті, жоғары және орта білім беру бойынша білікті мұғалімдерді дайындау мәселесі қарастырылады.

4. Аталған мәселелерді шешу мүмкіндігін беретін ыңғайлар ұсынылады (оқыту үдерісінде АТ құралдарын қолданудың психологиялық-педагогикалық аспектілерін қарастыратын нақты ғылыми зерттеулердің қажеттігі; оқу курстарына интеграцияланатын жоғары сапалы бағдарлама-

лық камсыздандыруды, яғни – оқыту және өзіндік оқыту үдерісінде кез-келген жастағы білімгерге икемді болатын «ашық» компьютерлік оқу жүйелерін жасау; пәндік салада болып жатқан өзгерістерге сәйкес жеңіл икемделетін АТ құралдары бойынша оқу курстарын жасау).

Сонымен, болашақ мұғалімнің объектілі-бағдарлы жобалау іс-әрекетіндегі басымдық нақты, жекелеген ақпараттық технологиялардың құралдары мазмұнының спецификалық аспектілерін қарастырудан білімгерлерде заманауи жобалау идеологиясы, есепті қою дағдылары, жалпы заманауи аппараттарды назарға ала отырып объектінің, құбылыстың моделін құру туралы түсініктерді қалыптастыруға алып келеді.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Советов Б.Я. Информационная технология. М.: Высшая школа, 1994, 368с.
- [2] Роберт И.В. Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы, перспективы использования. М., 1994.
- [3] Педагогика профессионального образования. Под редакцией В.А.Сластенина. М.: АКАДЕМА, 2004, 368с.
- [4] Е.В.Михеева. Информационные технологий в профессиональной деятельности. М.: Академия, 2006, 384с.
- [5] В.А.Попков, А.В.Коржуев. Теория и практика высшего профессионального образования. М.: Академический проект, 2004, 428с.
- [6] М.Т.Громкова. Психология и педагогика профессиональной деятельности: Учебное пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003, 415с.
- [7] М.В. Буланова-Топоркова. Педагогика и психология высшей школы: Учебное пособие, Ростов н/Д, Феникс, 2002, 544с.
- [8] Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. Учеб.пособие для студ.пед.вузов и системы повыш. пед. кадров. М. Издательский центр “Академия”, 2001, 272с.
- [9] Галямова, Э.М. Методика преподавания технологии: Учебник для студентов учреждений высшего профессионального образования / Э.М. Галямова, В.В. Выгонов. М.: ИЦ Академия, 2013. 176с.
- [10] Софронова, Н.В. Теория и методика обучения информатике. / Н.В. Софронова. М.: Высшая школа, 2004. 223 с.
- [11] Технологическая компетентность профессиональной подготовки учителя. Казахстан и Россия: пути дружбы, культурного диалога, интеграции образования науки: Труды международной научно-практической конференции. В 2-х томах. Кокшетау. ТОО "Копироваальный центр", 2006, Т.1, 162-166с. (в соавторстве с Егоров В.В., Смирнова Г.М.).
- [12] Системный подход к формированию технологической компетентности будущего педагога профессионального обучения. Социально-экономические проблемы муниципального управления: теория и опыт: сб SCIEN. тр. по материалам международной конференции. Новосибирск: НКАУ, 2006, 101-104с. (совместно с Егоров В.В., Смирнова Г.М.).
- [13] Современные методы и технологии в промышленном секторе (учебно-методический комплекс по специальности 050120-Профессиональное обучение). Караганда, Изд-во университета, 2007, 105с. (В соавторстве с Ударцева С.М.).
- [14] Обучение специалистов в условиях информационного общества. Татищевский следующим образом: актуальные проблемы науки и практики (APNP 2004): Труды Международной конференции (гуманитарных и образования)., Тольятти: Волжский университет. В. Н. Татищев, 2004. Часть 1, С.114-119 (в соавторстве с Шкутин Лос-Анджелесе).
- [15] Инновационная деятельность в учебном процессе. Татищевский чтения: актуальные проблемы науки и практики (APNP 2004): Материалы международной научно-практической конференции (Управление образования и информационных технологий). Тольятти: Волжский университет. В. Н. Татищев, 2004, С. 89-93 (в соавторстве с Мишукова TN).
- [16] информатизации системы образования Республики Казахстан. Татищевский чтения: актуальные проблемы науки и практики (APNP 2004): Материалы международной научно-практической конференции (Управление образования и информационных технологий). Тольятти: Волжский университет. В. Н. Татищев 2004, С. 128-132.
- [17] Эффект профессионально важных качеств в профессиональном становлении личности. Педагогические проблемы технологической информации и подготовки специалистов высшей школы: Сб научных работ. - Караганда: Изд-во университета, 2004, С. 20-25 (в соавторстве с Смирнова Г.М., Ударцева С.М.).
- [18] Компетентностный подход в подготовке педагога профессионального обучения. Вестник ПГУ. 2006, №1, С. 140-147.
- [19] AI.Tazhigulova Конструирование электронные учебники. Научный журнал «Информационные технологии в Казахстане», №1, 2000. 2-3с.
- [20] S.Beshenkov, E.Rakitina. Моделирование и формализация. Инструментарий. ММ: LBZ, 2002. 336 с. (В рус.).

REFERENCES

- [1] Sovetov B.I. Information technology. M.: High school, 1994, 368 p.
- [2] Robert I.B. Modern information technologies in education: didactic problems, prospects of use. M., 1994.
- [3] Vocational Education Pedagogy. Edited by B.A.Slastenina. M.: АКАДЕМА, 2004, 368p.
- [4] E.V.Miheeva. Information technologies in professional work. M. Academy, 2006. 384p.

- [5] B.A.Popkov, A.B.Korzhyev. Theory and practice of higher education. M.: Academic Project, 2004, 428p.
- [6] M.T.Gromkova. Psychology and pedagogy of professional activity: Textbook for high schools. M.: UNITY-DANA, 2003, 415p.
- [7] M.B. Bulanova-Toporkova. Education and Higher Education of Psychology: A Textbook. Rostov n\D: Phoenix, 2002, 544p.
- [8] Polat E.C. New pedagogical and information technologies in the education system. Textbooks for stud.ped.vuzov and increasing system. ped. kadrov. M, Publishing Center "Academy", 2001-272p.
- [9] Galyamova, EM Methods of teaching technologies: textbook for students of higher education institutions / EM Galyamova, VV Pasture. M.: Akademiya, 2013. 176p.
- [10] Sofronova, NV Theory and methods of training to computer science. / NV Sofronova. M.: Higher School, 2004. 223p.
- [11] The technological competence of vocational training of the teacher. Kazakhstan and Russia: the path of friendship, cultural dialogue, integration of education science: proceedings of the international scientific-practical conference. In 2 parts. Kokshetau.: TOO "Copy center", 2006. T.1, P.162-166 (in collaboration with Egorov V.V., Smirnova G.M.).
- [12] A systematic approach to the formation of the technological competence of the future teacher of vocational training. Social and economic problems of municipal management: Theory and Experience: Sat. Scien. tr. on materials of the international conference. Novosibirsk: NSAU, 2006, p.101-104 (together with Egorov VV, Smirnova GM).
- [13] Modern techniques and technologies in the industrial sector (training complex for the specialty 050120 - Vocational training). Karaganda: Publishing house of the University, 2007, 105 p. (together with Udartseva SM).
- [14] Training experts in the conditions of information society. Tatishevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the International Conference (Humanities and Education). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishev, 2004, Part 1, P. 114-119 (together with Shkutin L.A.).
- [15] The innovative activity in educational process. Tatishevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the international scientific conference (Education Management & Information Technologies). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishev, 2004, P.89-93 (in collaboration with Mishukova T.N.).
- [16] Education System Informatization of the Republic of Kazakhstan. Tatishevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the international scientific conference (Education Management & Information Technologies). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishev 2004, P.128-132.
- [17] The effect of professionally important qualities in the professional formation of the person. Pedagogical Issues tehnologiicheskoy information and training specialists of high school: Sat. scientific papers. Karaganda: Publishing house of the University, 2004. P.20-25 (in collaboration with Smirnova G.M., Udartseva S.M.).
- [18] Competence approach in the preparation of the teacher of vocational training // PSU Bulletin. 2006, № 1, p.140-147.
- [19] AI.Tazhigulova. Kostruirovaniye electronic textbooks. Scientific journal "Information Technologies in Kazakstan", №1, 2000, 2-3p.
- [20] S.Beshenkov, E.Rakitina. Modeling and formalization. Toolkit. MM: LBZ, 2002, 336 p. (in Russ.).

УДК 622.011.4+622.023

Ж.Ж. Кожамкулова, Н. Аманкелдиқызы, Д.А. Кабаева

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ ПЕДАГОГОВ, И ИХ РАЗВИТИЕ

Аннотация. Одной из актуальных проблем казахстанского общества является формирование конкурентоспособной личности, готовой не только жить в меняющихся социальных и экономических условиях, но и активно влиять на существующую действительность, изменяя её к лучшему. В связи с этим на первый план выходят определенные требования к такой личности – креативность, активность, социальная ответственность, обладание развитым интеллектом, высокий уровень профессиональной грамотности, устойчивая мотивация познавательной деятельности.

Одним из приоритетных направлений образовательной политики является переориентация образовательного процесса на компетентностный подход. Дальнейшее развитие высшего отечественного образования остается в числе приоритетов государственной политики. Актуальным является повышение качества подготовки высококвалифицированных и конкурентоспособных кадров для всех отраслей экономики, создание условий для профессиональной подготовки высококомпетентных педагогов новой формации, способных работать в условиях инновационных преобразований, информатизации образования. Безусловно, что полная интеграция в мировое образовательное пространство требует поднятия системы образования на международный уровень.

Ключевые слова: будущие педагоги, информационная технология, педагог, методика.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 116 – 125

B.D. Koshanov, E.N. Adilbekov, E. Duysen

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru, ermurat_91@mail.ru, erlan_duysen@mail.ru

**THE DIMENSION OF THE SPACE SOLUTIONS OF THE DIRICHLET
PROBLEM FOR THE POISSON AND BIHARMONIC EQUATIONS IN
UNBOUNDED DOMAINS - I**

Annotation. In this paper, we investigate the behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and the biharmonic equations in an unbounded domain. In studies of such problems there is a need of introduction of additional conditions at infinity determine uniquely solutions of the studied problems. In the paper the dimension of the space of solutions for the above mentioned task with additional conditions is calculated.

Keywords: Poisson equation, biharmonic equation, bi-Laplace operator, Dirichlet problem.

MSC 35J67, 31A30, 31A10.

УДК 517.951

Б.Д. Қошанов, Е.Н. Әділбеков, Е. Дуйсен

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

**ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТА ПУАССОН
ЖӘНЕ БИГАРМОНИАЛЫ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ
ШЕШІМДЕР КЕҢІСТІГІНІҢ ӨЛШЕМІ - I**

Аннотация. Бұл жұмыста шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы тендеулер үшін Дирихле есептерінің шешімдері зерттелген. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды. Қосымша шарты бар аталған есептердің шешімі көрсетілген кеңістіктердің өлшемдері есептелінген.

Тірек сөздер: Пуассон тендеуі, бигармониалы тендеу, би-Лаплас операторы, Дирихле есебі.

Кіріспе. Дифференциалдық тендеулер үшін тиянақты шеттік есептердің қасиеттерін зерттеу теориялық жағынан да, математика мен механиканың түрлі қолданбалы есептерінің қосымшалары (қолдану аясы) үшін де маңызды екендігі белгілі.

Жоғарғы ретті эллиптикалық тендеулер үшін шеттік есептер теориясына математиктер ерекше назар аударуда.

Моделді полигармониалы оператор Δ^m таңдау ең алдымен, бұл оператор қолдану аясы тұрғысынан қызықты. $m = 1$ болса - бұл белгілі Лаплас операторы болып табылады, электростатикалық өрісте потенциалдардың таратылуы Пуассон тендеуімен сипатталады; $m = 2$ болса - бұл би-Лаплас операторы деп аталады, мұндай операторлар жұқа пластина мен қабыршақ тербелісін сипаттайды; кез-келген m жағдайында сандық талдауда көптеген қосымшалары бар кубатуралық формулаларда қолданылады.

Лаплас операторы мен лапласиан спектрлік сипаттамаларынан алынатын инвариантты көпбейнелер Риман геометриясында кеңінен қолданылады. Кубатуралық формулаларды негіздеу

кезінде полигармониалы теңдеуі маңызды рөл атқарады. Бұл жағдайда, С.Л. Соболев [1] көрсеткендей, полигармониалы теңдеудің шектелмеген шешімдерін пайдалану қажет.

Алайда, тіпті Лаплас теңдеуі үшін де шектелмеген функциялар классында шеттік есептердің дұрыс тұжырымдалуы толық зерттелмеген [2,3]. Эллиптикалық операторлар үшін қарастырылған шеттік есептер және оларға қатысты пайымдаулар кейбір Соболев-Бесов типті [1] салмақты кеңістіктерге кеңейтуге мүмкін болады.

Шектелмеген облыста Пуассон теңдеуінің шешімдерін зерттеу қолдану тұрғысынан қызықты болып табылады. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің (Пуассон теңдеуі үшін) шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды.

Мұндай қосымша шарттар, әдетте, физикада мағынасы өте зор, Зоммерфельдтің сәулелену шарттары [4,5] деп аталады.

Бигармониалы және полигармониалы теңдеулер үшін жазықтықта шеттік есептердің тиянақты тұжырымдалуы комплекс айнымалы функциялар теориясының әдістерімен [10-12] жұмыстарда көрсетілді. Бұл жұмыстарда жазықтықта аналитикалық және гармоникалық функциялардың жалпыланған классикалық интегралдық өрнегінің теориясының негізінде Дирихле, Нейман, Робен және басқа да шеттік есептердің Грин функциясы құрылды.

Зерттеулер кеңістік өлшемі көпөлшемді болған жағдайда күрделі болады. Полигармониалы теңдеудің кез келген оң жағы үшін Дирихле есебі бірмәнді шешілетіндігі белгілі. [13-15] жұмыстарда көпөлшемді шарда полигармониалы теңдеу үшін Дирихле есебінің Грин функциясының жаңа өрнегі айқын түрде құрылды.

[17,18] жұмыстарында көпөлшемді бірлік шарда Пуассон теңдеуі үшін Нейман есебінің Грин функциясының өрнегі алынды.

[16] жұмыста көпөлшемді шарда полигармониалы теңдеулер үшін әртүрлі шеттік есептердің шешімділігінің шарттарын табу мәселелері зерттелген.

Шектелмеген облыстарда эллиптикалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу өзекті мәселе болып табылады.

Шектелмеген облыста Лаплас теңдеуі үшін тиянақты шеттік есептің бар екендігі бұрыннан белгілі. Осыған орай [5] монографиясында Зоммерфельдтің сәулелену шарттары келтірілген. [2,3,19] жұмыстарында дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кейбір кластары үшін шешімділік сұрақтары зерттелген.

Осы жұмыстың нәтижелері шексіздікте қойылатын қандай да бір интегралдық шарты ретінде болатын салмақты кеңістікті енгізумен тығыз байланысты. Бұл жұмыста Пуассон теңдеуі мен бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебінің салмақты шешімдер кеңістігінің өлшемдері есептелінген. Сонымен қатар, бұл жұмыстың тағы бір ерекшелігі, құрылған әдістер кеңістіктің айнымалы санына және дифференциалдық теңдеудің реттіне байланысты емес.

Бұл - жұмыстың бірінші бөлімі. Осы бөлімде шектелмеген облыста көпөлшемді салмақты кеңістікте Лаплас операторы өзегінің өрнегі көрсетіледі. Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебіне, шексіздікте қосымша шарты бар, шешімдер кеңістігінің өлшемі есептелінеді.

1 Шектелмеген облыстағы көпөлшемді салмақты кеңістіктегі Лаплас операторының өзегі

Бұл бөлімде шектелмеген $\Omega \subset R^n$ облысындағы Лаплас операторы үшін шекаралық есептер зерттеледі.

Координат бас нүктесі бар \overline{G} компакттың сыртында Лаплас теңдеуінің

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega \equiv R^n \setminus \overline{G} \quad (1)$$

$u(x)$ шешімі зерттеледі.

Келесі белгілеуді енгізейік:

$C_0^\infty(\Omega)$ – Ω -дағы компакт тұғыры бар $C^\infty(\Omega)$ кеңістігінен алынған функциялар кеңістігі;

$W_2^1(\Omega)$ нормасы бойынша $C^\infty(\bar{\Omega})$ толықтыруынан алынған функциялар кеңістігі, норма келесі түрде алынған

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \equiv \left[\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right);$$

$W_2(\Omega)$ – жоғарыдағы норма бойынша $C_0^\infty(\Omega)$ толықтыруынан алынған функциялар кеңістігі;

$W_{2,loc}^1(\Omega)$ – кез-келген $Q_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$ шары үшін $u(x) \in W_2^1(\Omega \cap Q_R)$ шартын қанағаттандыратын $u(x)$ функциялар кеңістігі;

$W_{2,loc}(\Omega)$ – $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$ шартын қанағаттандыратын $u(x) \in W_{2,loc}^1(\Omega)$ функциялар кеңістігі;

$$D(u, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad D_\alpha(u, \Omega) \equiv \int_{\Omega} \rho^\alpha |\nabla u|^2 dx, \quad (2)$$

мұндағы $n > 2$, $\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\alpha \in R^1$.

Келесі лемма орындалады.

Лемма 1.1. $u(x)$ функциясы $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ шартын қанағаттандыратын Ω облысындағы $\Delta u(x) = 0$ теңдеуінің шешімі болсын. Онда $n \geq 3$ үшін $u(x)$ функциясы үшін келесі өрнек

$$u(x) = P(x) + C_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \quad (3)$$

орындалады, мұндағы $P(x)$ – дәрежесі d_0 -ден төмен көпмүшелік

$$d_0 = \max \left\{ 1; 1 - \frac{\alpha + n}{2} \right\},$$

$\Gamma(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{2-n}$ - Лаплас операторының іргелі шешімі [4], σ_n – R^n -дегі бірлік

сфераның бетік ауданы, $C_i, i = 0, 1, \dots, n$ – кейбір тұрақтылар, $u_1(x)$ функциясы үшін келесі бағалау орындалады:

$$|\partial_x^\gamma u_1(x)| \leq b_\gamma |x|^{-n-|\gamma|}, \quad (4)$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ – бүтін теріс емес сандар,

$b_\gamma = const$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Дәлелдеуі. G шектелген облыс болғандықтан, онда оны қандай да бір $Q_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$ шарда жатады деп есептеуімізге болады.

Айталық, $\theta(|x|) \in C^\infty(R^1) : \theta = 1$ үшін $|x| > R + 2$ және $\theta = 0$ үшін $|x| < R + 1$ болса, онда $v(x) = \theta(|x|) \cdot u(x)$ функциясы R^n -де $\Delta v(x) = f(x)$ теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы $f(x) \in C_0^\infty(R^n)$.

$$w(x) = v(x) - \int_{R^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y) \cdot dy, \quad (5)$$

деп алайық, мұндағы $\Gamma(x)$ – Лаплас операторының іргелі шешімі.

$$\Delta w(x) = 0 \quad R^n \text{ - де.} \quad (6)$$

(6) теңдеуіне Фурье түрлендіруін қолдансақ келесі теңдікті аламыз

$$|\eta|^2 \cdot \tilde{w}(\eta) = 0 \quad (7)$$

мұндағы $\tilde{w}(\eta)$ – функциясы $w(x)$ функциясының Фурье образы.

(7) формулада $\tilde{w}(\eta)$ функциясының тұғыры бір нүктелік жиынан $\{0\}$ құралады. Сондықтан [6], $\tilde{w}(\eta)$ функциясы $\delta(x)$ функциясы мен оның туындыларының ақырлы сызықты комбинациясынан тұрады. Осыдан $w(x)$ көпмүшелік екендігі шығады.

(5) формуладан

$$v(x) = P(x) + v_1(x) \quad (8)$$

аламыз, мұндағы $P(x) \equiv w(x)$ – көпмүшелік, ал

$$v_1(x) = \int_{R^n} \Gamma(x-y) \cdot f(y) \cdot dy. \quad (9)$$

Айталық, $d - P(x)$ көпмүшелігінің реті болсын. $d < d_0$ болатынын көрсетейік. $d \geq d_0 \geq 1$ болсын деп ұйғарайық. Онда $x \in K \cap \{x \in R^n : \rho > N\}$ кезінде

$$|\nabla P(x)| \geq \text{const } \rho^{d-1} \quad (10)$$

болатын, R^n -нен төбесі координаталар бас нүктесінде жататын K конусы мен $N > 0$ саны табылады.

R^n -нен төбесі координаталар бас нүктесінде жататын K конусы деп, егер $x \in K$, онда кез-келген $\mu > 0$ үшін $\mu \cdot x \in K$ болатын облысты айтады.

Басқаша жағынан

$$f(x) \in C_0^\infty(R^n) \text{ болғандықтан, ал } |\nabla_x \Gamma(x-y)| \leq c \cdot |x-y|^{1-n},$$

онда

$$|\nabla v_1(x)| \leq \text{const } \rho^{1-n}.$$

Осыдан және (10)-нан $x \in K \cap \{x \in R^n : \rho > N\}$ кезінде

$$|\nabla v(x)| \leq \text{const } \rho^{d-1} \quad (11)$$

шығады. $v(x)$ функциясының анықтамасынан $D_\alpha(v(x), \Omega) < \infty$ болатынын көреміз. Басқаша айтқанда, (11) теңсіздігінің көмегімен

$$D_\alpha(v(x), \Omega) \geq \int_{K \cap \{\rho > N\}} \rho^{2(d-1)+\alpha} dx$$

шығады.

Алынған интегралдың жинақталуы үшін

$$2 \cdot (d-1) + \alpha + n < 0$$

шарты орындалуы жеткілікті. Осыдан

$$d < 1 - \frac{(\alpha + n)}{2} \leq d_0$$

шығады.

Сонымен

$$d < d_0.$$

Енді

$$v_1(x) = a_0 \cdot \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + v_2(x) \quad (12)$$

теңдігі орындалатындығын көрсетейік, мұндағы a_0, \dots, a_n – кейбір тұрақтылар, ал $v_2(x)$ функциясы (4) теңсіздігін қанағаттандырады.

Тейлор формуласы [6] бойынша

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} y_j + \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Gamma(x+t \cdot y)}{\partial x_i \cdot \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j$$

жіктеледі. Бұл теңдікті (9)-ға қойып, келесі теңдікті аламыз:

$$\begin{aligned} v_1(x) = & \Gamma(x) \cdot \int_{R^n} f(y) \cdot dy - \sum_{j=1}^n \int_{R^n} y_j \cdot f(y) \cdot dy \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + \\ & + \int_{R^n} \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Gamma(x+t \cdot y)}{\partial x_i \cdot \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j \cdot f(y) dy. \end{aligned}$$

Осыдан (12) формуласы келесі коэффициенттермен

$$a_0 = \int_{R^n} f(y) dy, \quad a_j = - \int_{R^n} f(y) \cdot y_j dy,$$

$$v_2(x) = \int_{R^n} \int_0^1 (1-t) \cdot \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 \Gamma(x+t \cdot y)}{\partial x_i \partial x_j} dt \cdot y_i \cdot y_j \cdot f(y) dy$$

шығады. $v_2(x)$ функциясы үшін (4) теңсіздігінің орындалуы тікелей тексеріледі. Сондай-ак $u(x) = v(x) = P(x) + v_1(x)$ өрнегі $|x| > R + 2$ үшін ондалады, осыдан $u(x)$ функциясы үшін (3) өрнегі шығады.

2 Шектелмеген облыстағы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі

$\Omega = R^n \setminus G$ облысында (1) теңдеуі үшін бірінші түрдегі шеттік есепті, яғни Дирихле есебін қарастырамыз

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (13)$$

Анықтама 2.1. [7] Егер $u(x) \in W_{2,loc}^1(\Omega)$ және кез-келген $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0 \quad (14)$$

интегралдық теңдік орындалса, онда $u(x)$ функциясын (1), (13) есебінің жалпыланған шешімі деп атайды.

Келешекте

$$D_\alpha(u, \Omega) \equiv \int_{\Omega} \rho^\alpha |\nabla u|^2 dx < \infty$$

шартын қанағаттандыратын (1), (13) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептейміз, мұндағы $\alpha \in R^1$.

$\Pi_1(\alpha) = \{u(x) \mid u(x) \text{ -- (1), (13) есебінің } D_\alpha(u, \Omega) < \infty \text{ шартын қанағаттандыратын жалпыланған шешімдер}\}$ кеңістігі болсын. $m_1(\alpha)$ арқылы $\Pi_1(\alpha)$ кеңістігінің өлшемін белгілейміз, яғни $m_1(\alpha) = \dim \Pi_1(\alpha)$.

Төменде $m_1(\alpha)$ шамасын есептейтін формулалар $\alpha \in R^1$ санына байланысты алынады. Лаплас операторымен қатар екінші ретті эллиптикалық операторларды қарастыруға болады. Барлық теоремалар

$$D_\alpha(u, \Omega) < \infty$$

шартымен (1), (13) есебі үшін тұжырымдалып дәлелденеді.

Келесі қосалқы есепті қарастырайық:

$$\Delta u = 0, \quad (15)$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x), (16)$$

$$F(u) \equiv \int_{\Omega} [|x|^{-2}|u|^2 + |\nabla u|^2] dx < \infty. (17)$$

Лемма 2.1. Кез-келген $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ функциясы үшін (15)-(17) есебінің шешімі жалғыз болады.

Дәлелдеуі. Алдымен шешімнің жалғыз екендігін көрсетеміз.

$u_1(x)$, $u_2(x)$ – (15)-(17) есебінің екі әртүрлі шешімі болсын. Онда

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

функциясы (15)-(17) есебінің

$$\varphi(x) = 0$$

шартын қанағаттандыратын шешімі болады.

Айталық,

$$v(x) = \theta_N(x) \cdot u(x),$$

мұндағы

$$\theta_N(x) = \theta\left(\frac{|x|}{N}\right), \theta \in C^\infty(R^n), 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$\theta(t) = 0 \text{ үшін } t > 2 \text{ және } \theta(t) = 1 \text{ үшін } t < 1.$$

(15) теңдеуін $v(x)$ функциясына көбейтіп және жеткілікті үлкен N үшін Ω обылысы бойынша интегралдасақ келесі өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Delta u \cdot v(x) dx \equiv - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \cdot \theta_N(x) dx - \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla \theta_N(x)) \cdot u dx = \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \cdot \theta_N(x) dx - \frac{1}{N} \int_{N < |x| < 2N} (\nabla u) \cdot \nabla \theta\left(\frac{|x|}{N}\right) \cdot u(x) dx. \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғышты Шварц теңсіздігі бойынша бағаласақ:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \int_{N < |x| < 2N} (\nabla u) \cdot \nabla \theta\left(\frac{|x|}{N}\right) \cdot u(x) dx \right| &\leq C \cdot \int_{|x| > N} |\nabla u| \cdot \frac{|u|}{x} dx \leq \\ &\leq C \cdot \left[\int_{|x| > N} |\nabla u|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{|x| > N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

және $N \rightarrow \infty$ шекке көшсек

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0, \quad u(x) \equiv \text{const},$$

сондай-ақ, Ω обылысында $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$ ескеретін болсақ, онда $u(x) \equiv 0$ шығады.

Енді (15)-(17) есебінің шешімінің табылатындығын көрсетейік. $W_{2,F}^1$ арқылы

$$\|u(x)\|_{W_{2,F}^1} = [F(u)]^{\frac{1}{2}}$$

нормасы бойынша $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігінің тұйықталуын белгілейміз.

$$M = \left\{ v(x) \in W_{2,F}^1, \quad v(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \right\}$$

деп жиынын анықтаймыз және

$$I(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

функционалын қарастырамыз.

Кез-келген $v(x) \in M$ үшін $I(v) \geq 0$ болғандықтан онда, I -дің мәндер жиыны M жиынында төменнен шенелген. Төменнен шенелген барлық жиындардың дәл төменгі шекарасы бар болады, оны $\inf_{v \in M} I(v) = \mu, \mu \geq 0$ [6] деп белгілейік. Дәл төменгі шекараның анықтамасы бойынша M жиынынан $\{u_k\}$ жинақталатын тізбегін бөліп алауға болады, $k \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $I(u_k) \rightarrow \mu$ болатындай. $\{u_k\}$ тізбегі **минималдаушы тізбек** деп аталады [8].

Алдымен $I(u_0) = \mu$ теңдігін қанағаттандыратын $u_0 \in M$ функциясының табылатындығын дәлелдейміз.

$\varepsilon > 0$ саны берілсін. Онда $k > N$ үшін $I(u_k) < \mu + \varepsilon$ орындалатын $N \gg 1$ саны табылады.

$k, m > N$ болсын. Сондай-ақ $u_k, u_m \in M$ болса, онда $\frac{u_k + u_m}{2} \in M$, осыдан

$$I\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) \geq \mu.$$

Параллелограмм теңдігінен

$$I\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) + I\left(\frac{u_k - u_m}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot I(u_k) + \frac{1}{2} \cdot I(u_m)$$

келесі теңсіздік

$$\mu + I\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) \leq \left(\frac{\mu + \varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\mu + \varepsilon}{2}\right) = \mu + \varepsilon,$$

яғни $I(u_k - u_m) \leq 4\varepsilon$ үшін

$$I\left(\frac{u_k - u_m}{2}\right) \leq \varepsilon$$

шығады.

Осылайша $k, m \rightarrow \infty$ ұмтылғанда $I(u_k - u_m) \rightarrow 0$ болады. Сонымен қатар, $(u_k - u_m)|_{\partial\Omega} = 0$ ескерсек, онда Харди леммасы [9] бойынша

$$\int_{\Omega} |u_k - u_m|^2 \cdot |x|^{-2} dx \leq C \cdot \int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_m)|^2 dx$$

аламыз. Сол себепті, $\{u_k\}$ тізбегі $W_{2,F}^1$ кеңістігінде фундаменталды (іргелі).

Шектік функцияны $u_0(x)$ деп белгілейік. $I(v)$ функционалы $W_{2,F}^1$ кеңістігінде үзіліссіз болғандықтан

$$I(u_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k) = \mu$$

орындалады.

Сонымен қатар, $W_{2,F}^1$ кеңістігі $W_{2,loc}^1(\Omega)$ кеңістігіне үзіліссіз енген. Осыдан және $u_k|_{\partial\Omega} = \varphi$ шартынан $u_0|_{\partial\Omega} = \varphi$ шығады. Осылайша $u_0(x) \in M$ және $I(u_0) = \mu$.

$u_0(x) \in M$ функциясы (15) шартын қанағаттандыратынын көрсетейік. $v \in C_0^\infty(\Omega)$ болсын. Онда R^1 -де анықталған $f(t) = I(u_0 + v \cdot t)$ функциясының $t = 0$ нүктесінде локалды минимум бар болады.

$$f(t) = I(u_0) + 2 \cdot t \cdot \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + t^2 \cdot I(v)$$

функциясы t айнымалысы бойынша дифференциалданады, олай болса $f'(0) = 0$.

Сондықтан, кез-келген $v \in C_0^\infty(\Omega)$ функциялары үшін $\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = 0$. Бұл теңдік $u_0(x)$

функциясының (15) теңдеуінің жалпыланған шешімі болатындығын білдіреді. Лемма 2.1 толығымен дәлелденді.

Бұл жұмыстың жалғасын екінші бөлімнен қараңыз.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігінің 3492/ГФ4 грантының қолдауымен орындалды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. -1974. - 808 с.
- [2] Кондратьев В.А., Олейник О.А. О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех. - 1985. - №4. - С. 38-47.
- [3] Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР, Сер. матем. - 1967. - Т. 31, №5. - С. 354-366.
- [4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, -1966. - 724 с.
- [6] Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1984. - Т.2.
- [7] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.
- [8] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.
- [9] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Поля Г. Неравенства. - М.: ИЛ, 1948.
- [10] Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems
- [11]// Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.
- [12] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analysis
- [13]// Preprint. - FU Berlin. - 2006. - P. 243-251.
- [14] Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. - 2009. - V. 40, № 2. - P. 251-282.
- [15] Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.

- [16] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сибирский Математический журнал. 2008, Т.49, №3, 423-428 с.
- [17] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008. - Т. 421, № 3. - С. 305-307.
- [18] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимский математический журнал. - 2010. - № 2. - С. 41-52.
- [19] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. - V. 1611. - P. 255-260.
- [20] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. - P. 104-123.
- [21] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д., Рамазанов М.А. О корректных краевых задачах для уравнения Лапласа во внешних областях // Деп. в КазГосИНТИ 04.05.98. - №8294 - Ка98.

REFERENCES

- [1] Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Nauka, Moscow. - 1974. - 808 p. (in Russian).
- [2] Kondrat'ev V.A., Oleinik O.A. Periodic solutions of second order parabolic equation in the outer regions // Vestnik MGU, ser.1, mat., mech. - 1985. - №4. - P. 38-47.
- [3] Kudryavtsev L.D. Solution of the first boundary value problem for self-adjoint and elliptic equations in the case of unbounded domains // Izvestie AN USSR, Ser. Mat. - 1967. - Т. 31, №5. - P. 354-366.
- [5] Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. - 1981. - 512 p. (in Russian).
- [6] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. -1966. - 724 p. (in Russian).
- [7] Zorich V.A. Mathematical analysis. Vol. 2. Nauka, Moscow. - 1984. (in Russian).
- [8] Mikhailov V.P. Differential equations in partial derivatives. High School, Moscow. -1983. (in Russian).
- [9] Mikhlin S.G. Linear partial differential equations. High School, Moscow. - 1977. (in Russian).
- [10] Hardy G.G., Littlewood D.E., Polya G. Inequality. IL, Moscow. - 1948. (in Russian).
- [11] Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.
- [12] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analysis // Preprint. - FU Berlin. - 2006. - P. 243 -251.
- [13] Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. - 2009. - V. 40, № 2. - P. 251--282.
- [14] Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.
- [15] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball, Siberian Mathematical Journal. - 2008. - V. 49, № 3. - P. 423-428.
- [16] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Doklady Mathematics. - 2008. - V. 78, № 1. - P. 528-530.
- [17] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for polyharmonic equation // Ufa Mathematical Journal. - 2010. - № 2. - P. 41-52.
- [18] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. - V. 1611. - P. 255-260.
- [19] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. - P. 104-123.
- [20] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., Ramazanov M.A. Correct boundary value problems for the Laplace equation in the outer regions // Dep. in KazGosINTI 04.05.98. - №8294 - Ка98.

Б.Д. Кошанов, Е.Н. Адильбеков, Е. Дуйсен

Институт математики и математического моделирования, Алматы

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА И БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ- I

Аннотация. В данной работе изучены поведения решений задач Дирихле для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области. При исследовании таких задач появляется необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решений исследуемых задач. В работе вычислены размерности пространств решений выше указанной задачи с дополнительным условием.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, бигармоническое уравнение, оператор би-Лапласа, задача Дирихле.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 126 – 131

B.D. Koshanov, E.N. Adilbekov, E. Duysen

Institute of Mathematics and Mathematical modeling, Almaty
koshanov@list.ru, ermurat_91@mail.ru, erlan_duysen@mail.ru

**THE DIMENSION OF THE SPACE SOLUTIONS
OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POISSON
AND BIHARMONIC EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAINS - II**

Annotation. In this paper, we investigate the behavior of solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and the biharmonic equations in an unbounded domain. In studies of such problems there is a need of introduction of additional conditions at infinity determine uniquely solutions of the studied problems. In the paper the dimension of the space of solutions for the above mentioned task with additional conditions is calculated.

Keywords: Poisson equation, biharmonic equation, bi-Laplace operator, Dirichlet problem.
MSC 35J67, 31A30, 31A10.

УДК 517.951

Б.Д. Қошанов, Е.Н. Әділбеков, Е. Дүйсен

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы

**ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТА ПУАССОН
ЖӘНЕ БИГАРМОНИАЛЫ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ
ШЕШІМДЕР КЕҢІСТІГІНІҢ ӨЛШЕМІ - II**

Аннотация. Бұл жұмыста шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есептерінің шешімдері зерттелген. Осындай зерттеулер кезінде қарастырылып отырған есептердің шешімін бірмәнді анықтау үшін шексіздікте қосымша шартты енгізу қажеттілігі туындайды. Қосымша шарты бар аталған есептердің шешімі көрсетілген кеңістіктердің өлшемдері есептелінген.

Тірек сөздер: Пуассон теңдеуі, бигармониалы теңдеу, би-Лаплас операторы, Дирихле есебі.

Бұл жұмыстың екінші бөлімі - жалғасы. Осы бөлімде бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебіне шексіздікте қосымша шарты бар шешімдер кеңістігінің өлшемі есептелінеді.

Бірінші бөлімде көрсетілген кеңістіктердің белгілеулері, есептердің және формулалардың номерлері өзгертілмей сол күйінде ары қарай жалғастырып кете береміз.

Енді $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ шарты бар (15), (13) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептеуге көшейік.

Теорема 2.1. $n > 2$ болсын.

1) Егер $n - 2 \leq \alpha < \infty$, онда $m_1(\alpha) = 0$;

2) Егер $-n \leq \alpha < n - 2$, онда $m_1(\alpha) = 1$;

3) Егер әрбір натурал r үшін $-2r - n \leq \alpha < -2r - n + 2$ болса, онда

$$m_1(\alpha) = \sum_{k=1}^r (2k + n - 2) \cdot \frac{(k + n - 3)!}{(n - 2)!k!}.$$

Дәлелдеуі. Теореманың 2) жағдайын ғана дәлелдейміз. Алдымен $m_1(0) = 1$ болатындығын көрсетейік. Айталық u_0 (15)-(17) есебінің $\varphi \equiv 1$ шартымен шешімі болсын. Осындай шешім лемма 1.1 бойынша бар және ол жалғыз.

$u(x) = u_0(x) - 1$ функциясын қарастырамыз. $u(x)$ функциясы (15) теңдеуді және (13) шекаралық шартты қанағаттандыратыны айқын. Сонымен қатар (17) көмегімен $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ болады. Сондықтан, $u(x) \in \Pi_1(0)$. Осылайша $m_1(0) \geq 1$.

$\Pi_1(0)$ кеңістігінің кез-келген $v(x)$ функциясы $v(x) = s \cdot u(x)$ түрінде болатындығын дәлелдейік, мұндағы $s \in R$ – кейбір тұрақты. Лемма 1.1 бойынша $u(x)$ функциясы үшін келесі өрнек орынды:

$$u(x) = P(x) + C_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \quad (18)$$

мұндағы $P(x)$ - көпмүшелік, $\deg P(x) \leq 1$ және $u_1(x)$ функциясы (14) теңсіздігін қанағаттандырады. $P(x) \equiv a_0 \neq 0$ болатындығын көрсетейік. Кері жорық. Айталық $a_0 = 0$ болсын. Онда

$$|u(x)| \leq |c_0 \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^n \left| c_j \cdot \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} \right| + |u_1(x)| \leq \text{const} \cdot |x|^{2-n}, \quad (19)$$

$$|\nabla u(x)| \leq |c_0 \nabla \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^n \left| c_j \cdot \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} \right| + |\nabla u_1(x)| \leq \text{const} \cdot |x|^{1-n}.$$

(15) теңдеуді $\Phi(x) = \theta_N(x) \cdot u(x)$ функциясына көбейтіп, оны Ω бойынша интегралдасак

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot \Phi(x) dx \equiv \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x) d(x) \equiv \\ \equiv - \int_{\Omega} \theta_N(x) \cdot |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{N} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x) dx. \quad (20)$$

аламыз, мұндағы $\theta_N(x) = \theta\left(\frac{|x|}{N}\right)$, $\theta \in C^\infty(R^1)$, $0 \leq \theta \leq 1$; $s < 1$ болса $\theta(s) = 1$ және

$s > 2$ болса $\theta(s) = 0$.

Алынған (20) теңдіктің оң жағында екінші қосылғышты бағалаймыз. (19) теңсіздіктің көмегімен $N \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{N} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \theta_N(x) \cdot u(x) dx \right| \leq C \cdot \frac{1}{N} \int_{\Omega \cap \{|x| > N\}} |\nabla u(x)| \cdot |u(x)| \cdot |x| dx \leq C \cdot \int_{|x| > N} |x|^{2-2n} dx \rightarrow 0$$

болады. Осыдан және (20) теңдігінен $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = 0$ шығады, яғни $u(x) = const$. (13)

шекаралық шарттың көмегімен $u(x) \equiv 0$. Алынған қарам- қайшылық (20) өрнегіндегі тұрақты $a_0 \neq 0$ болатындығын көрсетеді.

$v(x)$ функциясы $\Pi_1(0)$ кеңістігінен алынған кез-келген функция болсын. Онда лемма 1.1 көмегімен

$$v(x) = a'_0 + c'_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n c'_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + v_1(x) \quad (21)$$

болады, мұндағы $v_1(x)$ функциясы (17) бағалауды қанағаттандырады.

$$s = \frac{a'_0}{a_0} \text{ деп алып және } w(x) = v(x) - s \cdot u(x) \text{ функциясын қарастырамыз. } \Omega \text{-да } \Delta w = 0$$

және $w(x)|_{\partial\Omega} = 0$ болатындығы айқын. Сонымен қатар (18), (21) және s санының таңдауының көмегімен $w(x)$ функциясы (20) теңсіздігін қанағаттандырады. Осыдан, жоғарыда көрсетілгендей, $w(x) = 0$ болатындығы шығады. Осылайша, $m_1(0) = 1$.

Енді $-n \leq \alpha < n - 2$ үшін $m_1(\alpha) = m_1(0)$ болатындығын көрсетейік. Айталық, кейбір $\alpha \in [-n; 0)$ үшін $u(x) \in \Pi_1(0)$ болсын. Онда лемма 1.1-ден

$$u(x) = a_0 + c_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x) \quad (22)$$

шығады. Сондықтан

$$|\nabla u(x)| \leq |\nabla c_0 \Gamma(x)| + \sum_{j=1}^n \left| c_j \cdot \nabla \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} \right| + |\nabla u_1(x)| \leq const \cdot |x|^{1-n} \quad (23)$$

Осыдан

$$D_0(u, \Omega) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq const \cdot \int_{\Omega} |x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty,$$

Шығады, яғни $u(x) \in \Pi_1(0)$.

Осылайша $-n \leq \alpha < 0$ үшін $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ болады. Басқаша айтқанда $\alpha < 0$ үшін $\Pi_1(\alpha) \subset \Pi_1(0)$. Сондықтан $-n \leq \alpha < 0$ үшін $m_1(\alpha) = m_1(0)$.

$0 \leq \alpha < n - 2$ болған жағдайды қарастырайық. Көрсетілген α параметірінің мәндері үшін $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ болатындығын көрсетсек жеткілікті.

Айталық, $u(x) \in \Pi_1(0)$ болсын. Онда $u(x)$ функциясын (22) түрде жазуға болады және ол үшін (23) бағалауы орынды. Яғни $\alpha < n - 2$ үшін

$$D_{\alpha}(u, \Omega) = \int_{\Omega} \rho^{\alpha} |\nabla u|^2 dx \leq const \cdot \int_{\Omega} |x|^{2-2n+\alpha} dx < \infty,$$

яғни $u(x) \in \Pi_1(\alpha)$. Осылайша, $0 \leq \alpha < n - 2$ болған кезде, $\Pi_1(0) \subset \Pi_1(\alpha)$ және $m_1(\alpha) = m_1(0) = 1$. Теорема дәлелденді.

3 Шектелмеген облыстағы бигармониялы теңдеу үшін Дирихле есебі

Координат бас нүктесі бар \overline{G} компакттың сыртында, яғни шексіз облыста бигармониялы теңдеу үшін келесі Дирихле есебінің $u(x)$ шешімін зерттейміз:

$$\Delta^2 u(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = 0, \quad x \in \Omega \equiv R^n \setminus \overline{G}, \quad (24)$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (25)$$

Бірінші бөлімге сай функциялар кеңістіктерінің белгілеулерін сол күйінде қалдырамыз.

Анықтама 3.1. Егер $u(x) \in W_{2,loc}^3(\Omega)$ және кез-келген $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функциясы үшін

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta \psi dx = 0, \quad (26)$$

интегралдық теңдігі орындалса, онда $u(x)$ функциясын (24),(25) есебінің жалпыланған шешімі деп атайды.

Біз осы бөлімде

$$D_\alpha(u, \Omega) \equiv \int_{\Omega} \rho^\alpha \left[|\nabla(\Delta u)|^2 + |u|^2 \right] dx < \infty$$

шартын қанағаттандыратын (24), (25) есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемін есептейміз.

Лемма 3.1. $u(x)$ функциясы $D_\alpha(u, \Omega) < \infty$ шартын қанағаттандыратын Ω облысындағы $\Delta^2 u(x) = 0$ теңдеуінің шешімі болсын. Онда $n > 4$ үшін $u(x)$ функциясы келесі өрнекке

$$u(x) = P(x) + C_0 \Gamma(x) + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x_j} + u_1(x), \quad (27)$$

ие болады, мұндағы $P(x)$ – дәрежесі d_0 -ден төмен көпмүшелік

$$d_0 = \max \left\{ 1; 2 - \frac{\alpha + n}{2} \right\},$$

$\Gamma(x) = -\frac{1}{(4-n)4 \cdot (2-n)} \cdot \frac{1}{\sigma_n} |x|^{4-n}$ - би-Лаплас операторының іргелі шешімі [4],

$\sigma_n = (2\pi)^n - R^n$ кеңістігіндегі бірлік сфераның бетік ауданы, $C_i, i = 0, 1, \dots, n$ - кейбір тұрақтылар, $u(x)$ функциясы үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left| \partial_x^\gamma \Delta u_1(x) \right| \leq b_\gamma |x|^{-n-|\gamma|}, \quad (28)$$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ - бүтін теріс емес сандар,

$b_\gamma = const$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

$\Pi_2(\alpha) = \{u(x) \mid u(x) \text{ -- (24), (25) есебінің } D_\alpha(u, \Omega) < \infty \text{ шартын қанағаттандыратын жалпыланған шешімдер}\}$ кеңістігі болсын. $m_2(\alpha)$ арқылы $\Pi_2(\alpha)$ кеңістігінің өлшемін белгілейміз, яғни $m_2(\alpha) = \dim \Pi_2(\alpha)$.

Төмендегі қосалқы есеп үшін

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (29)$$

$$u(x)|_{\alpha\Omega} = \varphi_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\alpha\Omega} = \varphi_1(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (31)$$

$$F(u) \equiv \int_{\Omega} [|x|^{-2}|u|^2 + |\nabla(\Delta u)|^2] dx < \infty \quad (32)$$

келесі лемма орынды.

Лемма 3.1. *Кез-келген $\varphi_0 \in C^3(\partial\Omega), \varphi_1 \in C^2(\partial\Omega)$ функциялары үшін (29)- (32) есебінің шешімі жалғыз.*

Шексіз облыста бигармониялы тендеу үшін Дирихле есебінің шешімдер кеңістігінің өлшемі жайында келесі негізгі теорема орынды.

Теорема 3.1. *$n > 4$ болсын.*

1) *егер $n - 4 \leq \alpha < \infty$ болса, онда $m_2(\alpha) = 0$;*

2) *егер $-n \leq \alpha < n - 4$ болса, онда $m_2(\alpha) = 1$;*

3) *егер әрбір натурал r үшін $-2r - n \leq \alpha < -2r - n + 4$ болса, онда*

$$m_2(\alpha) = \sum_{k=1}^r (2k + n - 4) \cdot \frac{(k + n - 5)!}{(n - 4)!k!}.$$

Ескерту. Көпөлшемді шектелмеген облыста бигармониялы тендеулерге Дирихле есебі үшін алынған нәтижелерді полигармониялы тендеулерге де алуға болады.

Бұл жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым министрлігінің 3492/ГФ4 грантының қолдауымен орындалды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. -1974. - 808 с.
- [2] Кондратьев В.А., Олейник О.А. О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех. - 1985. - №4. - С. 38-47.
- [3] Кудрявцев Л.Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР, Сер. матем. - 1967. - Т. 31, №5. - С. 354-366.
- [4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, -1966. - 724 с.
- [6] Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1984. - Т.2.
- [7] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.
- [8] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.
- [9] Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Поля Г. Неравенства. - М.: ИЛ, 1948.
- [10] Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.
- [11] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analysis // Preprint. - FU Berlin. - 2006. - P. 243 -251.
- [12] Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. - 2009. - V. 40, № 2. - P. 251--282.
- [13] Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.

- [14] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сибирский Математический журнал. 2008, Т.49, №3, 423-428 с.
- [15] Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской Академии Наук. - 2008. - Т. 421, № 3. - С. 305-307.
- [16] Кангузин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимский математический журнал. - 2010. - № 2. - С. 41-52.
- [17] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. - V. 1611. - P. 255-260.
- [18] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. - P. 104-123.
- [19] Кангузин Б.Е., Кошанов Б.Д., Рамазанов М.А. О корректных краевых задачах для уравнения Лапласа во внешних областях // Деп. в КазГосИНТИ 04.05.98. - №8294 - Ка98.

REFERENCES

- [1] Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. Nauka, Moscow. - 1974. - 808 p. (in Russian).
- [2] Kondrat'ev V.A., Oleinik O.A. Periodic solutions of second order parabolic equation in the outer regions // Vestnik MGU, ser.1, mat., mech. - 1985. - №4. - P. 38-47.
- [3] Kudryavtsev L.D. Solution of the first boundary value problem for self-
- [4] adjoint and elliptic equations in the case of unbounded domains // Izvestie AN USSR, Ser. Mat. - 1967. - Т. 31, №5. - P. 354-366.
- [5] Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. - 1981. - 512 p. (in Russian).
- [6] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Nauka, Moscow. -1966. - 724 p. (in Russian).
- [7] Zorich V.A. Mathematical analysis. Vol. 2. Nauka, Moscow. - 1984. (in Russian).
- [8] Mikhailov V.P. Differential equations in partial derivatives. High School, Moscow. -1983. (in Russian).
- [9] Mikhlin S.G. Linear partial differential equations. High School, Moscow. - 1977. (in Russian).
- [10] Hardy G.G., Littlewood D.E., Polya G. Inequality. IL, Moscow. - 1948. (in Russian).
- [11] Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. - 2006. - V. 255. - P. 13-34.
- [12] Begehr H. Six Biharmonic Dirichlet Problems in Complex Analysis // Preprint. - FU Berlin. - 2006. - P. 243 -251.
- [13] Begehr H., Vaitekhovich T. Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math. - 2009. - V. 40, № 2. - P. 251--282.
- [14] Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2008. - V. 53, № 2. - P. 177-183.
- [15] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball, Siberian Mathematical Journal. - 2008. - V. 49, № 3. - P. 423-428.
- [16] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Yu. Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Doklady Mathematics. - 2008. - V. 78, № 1. - P. 528-530.
- [17] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Necessary and sufficient conditions for the solvability of boundary value problems for polyharmonic equation // Ufa Mathematical Journal. - 2010. - № 2. - P. 41-52.
- [18] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. On an explicit form of the Green function of the third boundary value problem for the Poisson equation in a circle // AIP Conference Proceedings. - 2014. - V. 1611. - P. 255-260.
- [19] Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. - 2016. - V.61, № 1. - P. 104-123.
- [20] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D., Ramazanov M.A. Correct boundary value problems for the Laplace equation in the outer regions // Dep. in KazGosINTI 04.05.98. - №8294 - Ка98.

Б.Д. Кошанов, Е.Н. Адильбеков, Е. Дуйсен

Институт математики и математического моделирования, Алматы

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА И БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ-II

Аннотация. В данной работе изучены поведения решений задач Дирихле для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области. При исследовании таких задач появляется необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решений исследуемых задач. В работе вычислены размерности пространств решений выше указанной задачи с дополнительным условием.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, бигармоническое уравнение, оператор би-Лапласа, задача Дирихле.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 132 – 145

UDC 517.9

M.B. Saprigina¹, M. I. Akylbayev², A.Sh.Shaldanbayev³

¹Southern Kazakhstan state pharmaceutical academy;

²Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Kazakhstan, Shymkent;

³M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

THE INVERSE PERIODIC PROBLEM OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR

Annotation. The Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions has an intrinsic symmetry, the manifestation of this symmetry is the existence of a multiple spectrum of this operator, which served as an obstacle to the formulation of the inverse problem. A multiple spectrum generates non-trivial invariant subspaces. In this paper it is shown that the projectors of these invariant subspaces can be used to recover the right-hand side of the equation, The uniqueness theorem is proved.

Keywords: Sturm-Liouville operator, completeness, basis property, eigenvectors, Green's function, Fourier series, spectrum, eigenvalues, inverse problem, right-hand side.

УДК 517.9

М.Б. Сапрыгина¹, М.И. Ақылбаев², А.Ш. Шалданбаев³

¹Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік фармацевтика академиясы;

²Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы;

³Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ПЕРИОДТЫ КЕРІ ЕСЕБІ

1.Кіріспе.

Табиғатта периодты құбылыстар жиі кездеседі, мысалы жүректің соғысы, күн мен түннің алмасуы, ай мен күннің қозғалысы, электронның ядроны айналуы, мүмкін сол себепті болар, бұл тақырыпқа арналған еңбектер жетерлік десе-де болады. Мысалы, француздың аса көрнекті ғалымы А. Пуанкаре, орыс зерттеушісі Жуковский, Ляпунов, Андронов т.б. Бұл зерттеушілердің бәрі тура есептер санатына жатады, ал бұл есептерге кері есептер тың тақырыптар санатына жатады, және өте аз зерттелген десек-те болады [1-16]. Оның өзіндік себеп салдары бар, ең басты қыйындық мұндай есептердің шешімдері шектеусіз операторлар арқылы өрнектеледі, сол себепті, бұл шешімдер қателіктерге төзімсіз болып келеді, яғни аз ғана қателік үлкен қателіктерге жол ашады. Сондықтан мұндай есептерді шешуге арнайы алгоритмдер қолданады [17-24]. Периодты есептің шешімі Гриннің функциясы арқылы өрнектеледі, ал Гриннің функциясына әсіре үзіксіз оператор сәйкес келетіндіктен есептің шешімі әсіре үзіксіз оператор арқылы өрнектеледі. Әсіре үзіксіз операторға кері оператор шектеусіз, олай болса іздеп отырған шешіміміз шектеусіз оператор арқылы өрнектеледі, сондықтан, біз бұл жолды таңдамадық. Біздің таңдаған жолымыз физикалық десек-те болады, яғни ол физикалық бақылау нәтижесіне негізделген. Әрине, бұл алгоритімнің орнықтылығын тексеру керек еді, бірақ біз мұндай есеп қоймадық және онымен айналыспадық.

2.Зерттеу әдістері**Периодты есеп**

Гилберттің $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде мынадай

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \quad (2)$$

шекаралық есепті қарастырайық, мұндағы $y(x)$ - белгісіз функция, ал λ - спектралді параметр. Кезкелген λ үшін $y(x) = 0$ функциясы (1)-(2) есептің шешімі болары айдан анық, оны елеусіз шешім дейік, ал егер белгілі бір λ үшін $y(x, \lambda) \neq 0$ шешімі сәйкес келсе онда оны осы елеулі шешімге сәйкес меншікті мән тиесілі меншікті функция дейік. Кейбір шекаралық есептердің елеулі шешімдері болмауы мүмкін, мұндай есептердің қатарына Кошидің мына,

$$Cy = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

есебі жатады, мұндай есептерді вөлтерлі деп атайды.

Енді біз жоғарыдағы (1)-(2) периодты шекаралық есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табайық, (1) теңдеудің жалпы шешімі мынадай,

$$y(x; \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \quad (3)$$

екені айдан анық, мұндағы A, B - белгісіз тұрақты шамалар, оларды табу үшін (3) формуланы (2) шекаралық шарттарға апарып қоялық

$$y(0) - y(\pi) = A - A \cos \sqrt{\lambda} \pi - B \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= A(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) - B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0;$$

$$y'(x; \lambda) = -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$y'(0) - y'(\pi) = B + \sqrt{\lambda} A \sin \pi \sqrt{\lambda} - B \cos \pi \sqrt{\lambda} =$$

$$= A \times \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} + B(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) = 0.$$

Әлгі әрекеттер нәтижесінде біз мынадай біртекті

$$\begin{cases} A(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) - B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ A \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} + B(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Теңдеулер системасына келдік. Бұл теңдеулер системасының елеулі шешімі бар болуы үшін оның анықтаушының нөлге айналуы қажетті әрі жеткілікті, яғни мына,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \cos \pi \sqrt{\lambda} & -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & 1 - \cos \pi \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

тендіктің. Осы формуланы ықшамдайық

$$\Delta(\lambda) = (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})^2 + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} = 1 - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} + \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} =$$

$$= 2 - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}), \lambda \neq 0 \text{- сәтінде.}$$

Демек, осы $\Delta(\lambda)$ функциясының нөлдерінің квадраттары біздің (1)-(2) есептің меншікті мәндері болады екен. Енді соларды табайық.

$$\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) = 0, 1 - \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0, \cos \pi \sqrt{\lambda} = 1,$$

$$\pi \sqrt{\lambda} = 2n\pi, (n \neq 0), \sqrt{\lambda} = 2n, \Rightarrow \lambda_n = (n)^2, n = \pm 1, \pm 2, ..$$

Бұл меншікті мәндерге сәйкес меншікті функцияларды (4) теңдеулер системасынан табамыз, $\lambda = \lambda_n = (2n)^2$ болған сәтте бұл системаның барлық коэффициенттері нөлге айналады, олай болса A мен B шамаларын қалауымызша алуға болады. Сонымен

$$y_n(x) = y(x; \lambda_n) = A_n \cos 2nx + B_n \frac{\sin 2nx}{2n}, n \neq 0. \quad (5)$$

Мына,

$$y_{-n}(x) = A_{-n} \cos 2nx + B_{-n} \frac{\sin 2nx}{2n}, n = 1, 2, \dots$$

Теңдіктен теріс индекстердің жаңа меншікті функциялар бермейтінін байқаймыз, сондықтан $n = 1, 2, \dots$ мәндерімен шектелеміз, ал $n = 0$ мәнін арнайы қарастырамыз, бұл сәтте $\lambda = 0$, демек

$$-y''(x) = 0$$

Мұнан $y(x) = Ax + B, A, B - \text{const}$. Осы функцияны (2) шекаралық шарттарға апарып қойсақ, онда

$$\begin{cases} B = A \times \pi + B, \Rightarrow A = 0, y(x) = B - \text{const} \\ A = A \end{cases}$$

боларын көреміз, сонымен $\lambda_0 = 0$ меншікті мән және оған $y_0(x) = B - \text{const}$ меншікті функция сәйкес келеді. Жоғарыдағы (5) формуладан байқайтынымыз әрбір $\lambda_n = (n \neq 0)$ меншікті мәнге екі меншікті функция сәйкес келеді, мысалы, $A_n = 1, B_n = 0$, десек онда

$$y_n(x) = \cos 2nx (n = 1, 2, \dots),$$

ал керісінше $A_n = 0, B_n = 1$ болса, онда

$$y_n(x) = \frac{\sin 2nx}{2n} (n = 1, 2, \dots)$$

болар еді. Сонымен, меншікті функциялар системасы мынау

$$u_n(x) = \cos 2nx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$v_n(x) = \sin 2nx, n = 1, 2, \dots$$

десек-те болады.

Енді осы системаның $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымды екенін көрсетейік. Айталық белгілі бір $f(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы үшін мына,

$$(f, u_n) = 0, (f, v_n) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

теңдіктер орындалсын делік, онда $f(x) = 0$ теңдігі $[0, \pi]$ сегментінің барлық нүктелерінде дерлік орындалатынын көрсетейік. Сонымен

$$(f, u_n) = \int_0^\pi f(x) \cos 2nxdx = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

болсын делік, онда $2x = t$ деп алмастыру жасасақ

$$x = \frac{t}{2}, dx = \frac{dt}{2},$$

$$(f, u_n) = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \cos nt \frac{dt}{2} = 0, \Rightarrow \int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \cos nt dt =;$$

Сол сыйақты

$$0 = (f, v_n) = \int_0^\pi f(x) \sin 2nx dx = \left| \begin{matrix} 2x = t \\ x = \frac{t}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \sin ntdt, \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \sin nt dt = 0, n = 1, 2, \dots$$

Мына, $\{\cos nt, \sin nt\}, n = 0, 1, 2, \dots$ тригонометриялық системаның $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымды екені бесенеден белгілі, олайболса

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = 0,$$

теңдігі $(0, 2\pi)$ интервалының барлық нүктелерінде дерлік орындалады, олай болса $f(x) = 0$ теңдігі $[0, \pi]$ сегментінің барлық нүктелерінде дерлік орындалады.

Енді (1)-(2) Штурм-Лиувилл операторының спектрінің еселік көрсеткішін зерттеп көрелік.

$$\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \pi\sqrt{\lambda})$$

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = 2 \sin \pi \sqrt{\lambda} \times \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = \pi \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} \Delta(\lambda) &= \pi \times \left[\frac{\left(\pi \sqrt{\lambda} - \frac{(\pi \sqrt{\lambda})^3}{3} + \frac{(\pi \sqrt{\lambda})^5}{5!} \right)''}{\sqrt{\lambda}} \right] = \\ &= \pi \left[\pi - \frac{\pi^3 \lambda}{3} + \frac{\pi^5 \lambda^2}{5!} - \frac{\pi^7 \lambda^3}{7!} \right]'' = \pi \left[\frac{\pi^5 \times \lambda^2}{5!} - \frac{\pi^7 \times 3 \times 2 \lambda}{7!} \right]; \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} \Delta(\lambda) &= \pi \left[-\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \sin \pi \sqrt{\lambda} + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \times \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right]; \end{aligned}$$

Егер $\lambda = \lambda_n = (2n)^2$ болса, онда

$$\Delta(\lambda_n) = 0, \dot{\Delta}(\lambda_n) = 0, \ddot{\Delta}(\lambda_n) = \frac{\pi^2}{2(2n)^2} \neq 0.$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = \pi^2 \neq 0:$$

Енді алынған нәтижені бір тұжырымдап қоялық.

Теорема Мына,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi), \quad (2)$$

шекаралық есептің шексіз көп меншікті мәндері бар және олар мыналар

$$\lambda_n = (2n)^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Әрбір нөлден өзгеше меншікті мәндерге қос меншікті функциялар сәйкес келеді олар мыналар,

$$u_n(x) = \cos 2nx, v_n(x) = \sin 2nx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$\lambda_0 = 0$ меншікті мәніне тек бір ғана $y_0 = 1$ функциясы сәйкес келеді.

Нөлден өзгеше меншікті мәндер екіеселі, ал $\lambda_0 = 0$ бір еселі.

Гилберттің $H = (0, \pi)$ кеңістігінде Штурм-Лиувиллдің периодты есебін қарастыралық

$$Ly - \lambda y = -y'' - \lambda y(x) = f(x) \quad (6)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \quad (7)$$

Тұрақтыларды вариациялау әдісімен осы есептің Гриндік функциясын құрайық

$$y_1 = \cos \sqrt{\lambda} x, y_2 = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

Біртекті $-y''(x; \lambda) = \lambda \times y(x, \lambda)$ теңдеуінің жалпы шешімі

$$y(x; \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{B \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

болатыны белгілі, мұндағы A, B - тұрақты шамалар, сондықтан жоғарыдағы (6) теңдеудің шешімін мына,

$$y(x; \lambda) = A(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} x + B(x, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}},$$

түрде іздейміз.

$$y'(x, \lambda) = A' \cos \sqrt{\lambda} x + B' \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$A' \cos \sqrt{\lambda} x + B' \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (8)$$

$$y'' = -\sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x + B' \cos \sqrt{\lambda} x - \lambda A \cos \sqrt{\lambda} x - B \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x,$$

$$-y'' = \sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x =$$

$$= \sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda \left[A \cos \sqrt{\lambda} x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right] =$$

$$= \lambda y + \sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x, \quad (9)$$

Соңғы (8)-(9) формулаларды біріктіріп,

$$\begin{cases} A' \cos \sqrt{\lambda} x + B' \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ A' \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x = f(x); \end{cases}$$

белгісіз $A(x; \lambda), B(x; \lambda)$ функциялары үшін теңдеулер системасын аламыз. Алдымен осы системаны Крамер әдісімен шешіп A', B' шамаларын, сосын, A, B шамаларын табайық.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & -\cos \sqrt{\lambda} x \end{vmatrix} = -\cos^2 \sqrt{\lambda} x - \sin^2 \sqrt{\lambda} x = -1;$$

$$A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \\ f(x) & \frac{-\cos \sqrt{\lambda} x}{(-1)} \end{vmatrix}}{(-1)} = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \times f(x),$$

$$B' = \frac{\begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & 0 \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & f(x) \end{vmatrix}}{(-1)} = -f(x) \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$A(x) = A + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt, B(x) = B - \int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt;$$

$$y(x, \lambda) = \left(A + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt \right) \cos \sqrt{\lambda} x + \left(B - \int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}},$$

(10)

мұндағы A, B - тұрақты шамалар. Осы (10) формуланы (7) шекаралық шарттарға апарып қойсақ белгісіз A, B коэффициенттерін табамыз.

$$y(0, \lambda) = A, y(\pi, \lambda) = \left(A + \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt \right) \cos \pi \sqrt{\lambda} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(B - \int_0^\pi \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right) \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \\
A \cos \pi \sqrt{\lambda} + \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + \frac{B \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt = A, \\
A(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1) + B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(x; \lambda) &= -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x = \\
&= -\sqrt{\lambda} \left(A + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin \sqrt{\lambda} x + \left(B - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right) \cos \sqrt{\lambda} x, \\
y'(0, \lambda) &= B, y'(\pi, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \left(A + \int_0^\pi f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin \pi \sqrt{\lambda} + \\
&+ \left(B - \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right) \times \cos \pi \sqrt{\lambda}; \\
\left(-\sqrt{\lambda} A - \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right) \sin \pi \sqrt{\lambda} + B \cos \pi \sqrt{\lambda} - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt &= B, \\
-\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} \times A + B (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1) &= \\
= \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt & \quad (12)
\end{aligned}$$

Жоғарыдағы (11)-(12) системаның анықтаушысын есептейік

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} \cos \pi - 1 & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & \cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \end{vmatrix} = (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)^2 + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} = \\
&= \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} + 1 + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} = 2 - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}).
\end{aligned}$$

Енді осы (11) –(12) системасын Крамердің әдісімен шешейік, сол үшін алдымен Δ_1, Δ_2 анықтаушытарын есептейік.

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt & \cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \end{array} \right| = \\
&= \frac{\cos \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos^2 \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
&\quad - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
&\quad - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin^2 \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^\pi f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt. \\
 A &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt; \\
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \\ -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \end{vmatrix} = \\
 &= \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
 &\quad - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \\
 &\quad + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
 &= \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \\
 &= (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt; \\
 B &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt
 \end{aligned}$$

Сонымен, іздеп отырған резөлвентамыздың түрі мынадай.

$$\begin{aligned}
 y(x; \lambda) &= R_{\lambda} f(x) = (L - \lambda I)^{-1} f(x) = \\
 &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] \cos \sqrt{\lambda} x + \\
 &\left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right] \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Енді осы (13) формуланы түрлендірейік сонан соң оны тексерейік.

$$\begin{aligned}
 y(x; \lambda) &= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt, \\
 y(\pi, \lambda) &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] \cos \pi \sqrt{\lambda} + \\
 &+ \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] \times \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \\
 &= \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
 &- \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin^2 \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \right) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \\
&+ \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{1 - \cos^2 \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right) \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1} - 1 \right) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \\
&+ \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \right) \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt;
\end{aligned}$$

Демек $\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \neq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратыны λ үшін, мына, теңдік орындалады. Енді екінші шекаралық шартты тексерейік,

$$\begin{aligned}
y'(x, \lambda) &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] (-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x) \\
&+ \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right] \times \cos \sqrt{\lambda} x + \\
&+ f(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \times \cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} - f(x) \frac{\cos \sqrt{\lambda} x \times \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}; \\
y'(0, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt; \\
y'(\pi; \lambda) &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] (-\sin \sqrt{\lambda} \pi) + \\
&+ \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] \cos \sqrt{\lambda} \pi = \\
&= -\frac{\sin^2 \pi \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
&- \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= \left(\frac{\cos^2 \pi \sqrt{\lambda} - 1}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2} \right) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2} \left(1 + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}} \right) \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
 & = \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} + 1}{2} - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2} \right) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt;
 \end{aligned}$$

Демек $\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \neq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық λ үшін мына, $y'(0, \lambda) = y'(\pi, \lambda)$, теңдік орынды.

Енді резольвентаның формуласын ықшамдайық,

$$\begin{aligned}
 y(x; \lambda) &= R_{\lambda} f(x) = \left(\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \right) \cos \sqrt{\lambda} x + \\
 & \quad + \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right] \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}; \\
 \text{а) } & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right) = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right]; \\
 \text{б) } & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt = \frac{1}{2} \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2} \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \\
 R_{\lambda} f(x) &= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
 & \quad - \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_x^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t dt}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \\
 & \quad + \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt = \\
 & = \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \left(\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \right) + \\
 & \quad + \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \times \left(\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} + \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \right) + \\
 & \quad + \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right) + \\
 & \quad + \int_x^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \left(-\frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right) = \\
 & = \frac{\sin x \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\sin(\pi + x) \sqrt{\lambda} - \sin x \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - x) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi + x) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_x^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \\
& = \int_0^x \left[\frac{(\sin x \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x) \sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} + \frac{(\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - x) \sqrt{\lambda}) \sin \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right] f(t) dt + \\
& + \int_x^\pi \left[\frac{(\sin(\pi + x) \sqrt{\lambda} - \sin x \sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{(\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi + x) \sqrt{\lambda}) \sin \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right] f(t) dt = \\
& + \int_x^\pi \frac{\sin(\pi + x) \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t - \cos(\pi + x) \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t - \sin x \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t + \cos x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \\
& = \int_0^x \frac{\sin(x - t) \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \\
& + \int_x^\pi \frac{\sin(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} - \sin(x - t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt.
\end{aligned}$$

Түрленген резольвента мынадай,

$$\begin{aligned}
y(x, \lambda) = R_\lambda f(x) & = \int_0^x \frac{\sin(x - t) \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \\
& + \int_x^\pi \frac{\sin(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} - \sin(x - t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt
\end{aligned}$$

түрге енді. Алынған нәтижедені тексеріп көрелік.

$$y(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - t) \sqrt{\lambda} + \sin t \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt, \quad (14)$$

$$y(\pi, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - t) \sqrt{\lambda} + \sin t \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt,$$

$$y'(x, \lambda) = \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times f(x) - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(x) +$$

$$+ \int_0^x \frac{\cos(x - t) \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \int_x^\pi \frac{\cos(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} - \cos(x - t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt;$$

$$y'(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt, \quad (15)$$

$$y'(\pi, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt.$$

$$y''(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^x \frac{-\sin(x - t) \sqrt{\lambda} - \sin(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt +$$

$$+ \sqrt{\lambda} \int_x^\pi \frac{-\sin(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} + \sin(x - t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(x) - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(x) = \\
 & = -\lambda y(x, \lambda) - \frac{f(x)}{2} - \frac{f(x)}{2} = -\lambda y(x, \lambda) - f(x), \Rightarrow \\
 & -y''(x, \lambda) = \lambda y(x) + f(x).
 \end{aligned}$$

Бізге керекті-де осы еді.

Теорема 2. Егер

$$\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \neq 0$$

болса, онда мына,

$$\begin{aligned}
 Ly - \lambda y &= -y''(x) - \lambda y(x) = f(x), x \in (0, \pi) \\
 y(0) &= y(\pi), y'(0) = y'(\pi)
 \end{aligned}$$

Штурм-Лиувиллдің периодты шекаралық есебінің кезкелген $f(x) \in L^2(0, \pi)$ үшін тек бір ғана шешімі бар және ол мынау,

$$\begin{aligned}
 y(x, \lambda) &= R_{\lambda} f(x) = \\
 &= \int_0^x \frac{\sin(x-t) \sqrt{\lambda} + \sin(\pi-x+t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \int_x^{\pi} \frac{\sin(\pi+x-t) \sqrt{\lambda} - \sin(x-t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

3. Зерттеу нәтижелері

Мына,

$$-y'' - \lambda y(x) = f(x), x \in (0, \pi) \quad (16)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \quad (17)$$

Шекаралық есептің шешімі $y(x, \lambda)$ белгілі бір $\lambda = \lambda_0$ нүктесінде белгілі болса, онда (16) формула бойынша теңдеудің бос мүшесін, яғни $f(x)$ функциясын табуға болады, ал егерде $y(x, \lambda_0)$ функциясы жуықтап ғана белгілі болса онда бұл есеп үшін үлкен мәселеге айналады.

Жоғарыдағы (16)-(17) есептің шешімі $y(x, \lambda)$ функциясы $(0, \pi)$ аралығындағы тербелісті өрнектейді. Толқындар сыртқы дүниемен тек $x = 0$ және $x = \pi$ нүктелерінде ғана шектеседі. Айталық осы нүктелерде өлшегіш құралдар орналасқан және олардың нәтижелері мыналар

$$y(0, \lambda) = y(\pi, \lambda), y'(0, \lambda) = y'(\pi, \lambda)$$

болсын делік, сонымен бірге, тербеліс жиіліктері яғни $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ шамалары белгілі болса, онда сыртқы әсер етуші күшті, яғни $f(x)$ функциясын таба аламыз-ба?

Есептің шешімі. Жоғарыдағы (14) формула бойынша

$$y(0, \lambda) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi-t) \sqrt{\lambda} + \sin t \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt,$$

мұнан

$$y(0, \lambda) \sqrt{\lambda} [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1] = \int_0^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi - t) + \sin \sqrt{\lambda} t}{2} f(t) dt$$

Меншікті $\{\lambda_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ мәндер арқылы $\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1$ функциясы бірмәнді анықталады. Олай болса

$$y(0, \lambda) \sqrt{\lambda} [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1] = (P \sin \sqrt{\lambda} t, f(t)) = (\sin \sqrt{\lambda} t, P f(t)),$$

где $Pu(x) = \frac{u(\pi-x)+u(x)}{2}$, яғни P операторы $L^2(0, \pi)$ кеңістігіндегі проектор. Сонымен $\int_0^\pi Pf(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = y(0, \lambda) \sqrt{\lambda} [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1]$, мұнан синус түрлендірунің бірімәнділігі теоремасы бойынша $Pf(t)$ функциясын анықтаймыз

Енді (15) формула бойынша

$$y'(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt,$$

мұнан

$$y'(0, \lambda) \times [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1] = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2} f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} y'(0, \lambda) [1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}] &= \int_0^\pi \frac{\cos t \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - t) \sqrt{\lambda}}{2} f(t) dt = \\ &= (Q \cos t \sqrt{\lambda}, f(t)) = (\cos t \sqrt{\lambda}, Qf(t)) \end{aligned}$$

мұндағы $Qu(x) = \frac{u(x)-u(\pi-x)}{2}$, яғни $Q = I - P$ операторы $L^2(0, \pi)$ кеңістігіндегі проектор. Сонымен,

$$\int_0^\pi Qf(x) \cos t \sqrt{\lambda} dt = y'(0, \lambda) [1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}],$$

мұнан косинус түрлендірудің бірімәнділігі туралы теорема бойынша $Qf(x)$ функциясын бір мәнді етіп табамыз. Нәтижесінде $Qf(t)$ және $Pf(t)$ функциялары бірімәнді табылады. Олай болса,

$$Pf(t) + Qf(x) = \frac{f(t) + f(\pi - t)}{2} + \frac{f(t) - f(\pi - t)}{2} = f(t)$$

функциясы-да бір мәнді табылады.

Теорема 3. Егер Штурм-Лиувиллдің периоды есебінің меншікті мәндері $\{\lambda_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ және оның шешімінің шекаралық мәндері

$$y(0, \lambda), y'(0, \lambda)$$

белгілі болса, онда әсер етуші сыртқы $f(t)$ күшті бірімәнді етіп табуға болады

4.Талқысы

Мұндай, кері есептер әдебиетте сирек кездеседі, оның бір себебі, шекарылық шарттардың тым қатал болуынды болса керек, бұл сәтте шекара арқылы системаға ешбір әсер өтпейді, яғни сыртқы дүние мен ішкі дүние байланыссыз, сондықтан сырқы әсерді шамалай алмаймыз.

5.Қорытынды

Периодты қозғалыстар табиғатта жиі кездеседі, мысалы, аспан денелерінің қозғалысы, айдың жерді айналуы, немесе жердің күнді айналуы, күннің темірқазық жұлдызын айналуы, сағат тілінің айналуы. Сол себепті болар математикалық және физикалық әдебиетте бұл тақырыпта арналған зерттеулер көптеп кездеседі. Көп жағдайда біз қозғалысты сырттан ғана бақылай аламыз, себебі қозғалушы нәрсе бізден тым алыс немесе тым майда, мысалы электронның ядроны айналып қозғалуы, немесе периодты түрде қайталанатын физикалық немесе химиялық процесс болуы мүмкін. Бұл сәтте қозғалушы күш көзге көрінбейді тек оның нәтижесі ғана көрінеді, яғни бақылау нәтижелері. Арнайы құралдар арқылы біз қозғалыстың траекториясы мен жылдамдықтарын анықтай аламыз. Өлшеуге болатын физикалық шамаларды физиктер бақыланатын шамалар деп атайды. Бірақ бұл шамалардың абсолютті дәл емес екеніне назар аударайық. Немістің көрнекті физигі В.Гейзенбергтің принципі бойынша мына, $\Delta(x) \times \Delta(v) \geq \hbar$, теңсіздік орындалады, мұндағы $\Delta(x)$ - координатаның ауытқуы, ал $\Delta(v)$ - жылдамдықтың ауытқуы \hbar - Планктың тұрақтысы. Біздің зерттеулеріміздің көрсетуінше бақыланатын шамалар арқылы әсер етуші сыртқы күштерді анықтауға болады. Кейбір сәттерде сыртқы әсер етуші күштерді байқау мүмкін емес, мысалы атомның ядросы. Біз оның электрондарға әсерін ғана байқай аламыз.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля.-М.:Наука, 1984.-С.240.
- [2] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля.// Вестник МГУ. Сер-1.-1982.-№3.-с.6-11.
- [3] Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега де Фриза // I. Функц. Анализ 8, вып.3(1974). 54-66.
- [4] Дубровин Б.А. Обратная задача теории рассеяния для периодическая конечнозонных потенциалов.// Функц. Анализ 9.вып.1(1975), 65-66.
- [5] Итс А.Р., Матвеев В.Б. Об операторах Хилла с конечным числом лагун//Функц. Анализ 9.вып.1.(1975).69-70.
- [6] Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. // ДАН СССР 217,№2(1974), 276-279.
- [7] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза и Штурма-Лиувилля их связь с алгебраической геометрия//ДАН СССР 219, №3(1974), 19-22.
- [8] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно-периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кдф, ЖЭТР 12(1974), 2131-2144.
- [9] Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Корневега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. Анализ 9.вып.1(1975), 41-51.
- [10] Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы с конечнозонным спектром и N- солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза//ТМФ.т.23,№1(1975), 51-68.
- [11] Левитан Б.М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.-М.:Наука, 1988.-431с.
- [12] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию.-М.:Наука, 1970.-670с
- [13] Кальменов Т.Ш., ШалданбаевА.Ш. The spectrum structure of Shtourm-Liouville boundary problem on the bounded segment. - International Conference "Differential Equations and Related Topics" dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G.Petrovskii.-Moscow, May 22-27, 2001.-с. 371.
- [14] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [15] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.
- [16] Levitan B. M. Inverse Sturm–Liouville Problem. VSP, Utrecht, 1987.
- [17] Lorenzi A. and Kabanikhin S. I. Identification Problems of Wave Phenomena. VSP, Utrecht,1999.
- [18] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. New York, Wiley & Sons, 1986.
- [19] Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. VSP, Utrecht, 1987.
- [20] Tikhonov A.N. On the stability of inverse problems. Doklady Acad. Sci. USSR 39 (1943),176–179.
- [21] Tikhonov A.N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. Dokl. Akad.Nauk SSSR 151, 3 (1963), 501–504 (in Russian).
- [22] Tikhonov A.N. On the regularization of ill-posed problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR 153, 1 (1963),49–52 (in Russian).
- [23] Tikhonov A.N. and Arsenin V.Ya. Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York, 1977.
- [24] Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V. and Yagola A. G. Regularizing Algorithms and A Priori Information. Nauka, Moscow, 1983 (inRussian).

REFERENCES

- [1] Levitan B. M. Return problems of Storm Liouville. - M of a.:nauk, 1984. - Page 240.
- [2] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Shturma-Liuvillya.//the Bulletin of MSU. Ser-1. -1982. -№3. - page 6-11.
- [3] Novikov S.P. the Periodic task for Cortevega de Friza's equation//I. Funkts. Analysis 8, issue 3(1974).54-66.
- [4] Dubrovin B. A. the Return task of the theory of dispersion for periodic the konechnozonnykh потенциалов.//Funkts. Analysis 9.vyp.1 (1975), 65-66.
- [5] Its A.R., Matveev V. B. About Hill's operators with final number of lacunas//Funkts. Analysis 9.vyp.1. (1975).
- [6] Marchenko V. A. Periodic problem of Kortevega of the Frieze.//The USSR 217, No. 2 (1974), 276-279 is GIVEN.
- [7] Dubrovin B. A. Novikov S.P. the Periodic task for the equation of Kortevega of the Frieze and Storm Liouville their communication with algebraic geometry//the USSR 219, No. 3(1974), 19-22 is GIVEN.
- [8] Dubrovin B. A., Noviko S. P., Periodic and conditional and periodic analogs of multisolitonic solutions of the equation Kdf, ZhETR 12 (1974), 2131-2144.
- [9] Dubrovin B. A., the Periodic task for the equation of Kornevega of the Frieze in a class the konechnozonnykh of potentials//Funkts. Analysis 9.vyp.1 (1975), 41-51.
- [10] Its A.R., Matveev V. B. Operators with a konechnozonny range and N-solitonic solutions of the equation of Kortevega of the Frieze//Tmf.T.23, No. 1(1975), 51-68.
- [11] Levitan B. M. Operators of Storm Liouville and Dirac. - M of a.:nauk, 1988. - 431 pages.
- [12] Levitan B. M., Sargsyan I. S. Introduction to the spectral theory. - M of a.:nauk, 1970. - 670s
- [13] Kalmenovt Sh., Shaldanbayeva.Sh. The spectrum structure of Shtourm-Liouville boundary problem on the bounded segment. - INTERNATIONAL CONFERENCE "Differential Equations and Related Topics" dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G.Petrovskii. - Moscow, May 22-27, 2001. - с. 371.

- [14] Shaldanbayev A. Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, **2002**. page 58-62.
- [15] Shaldanbayev A. Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a periodic and anti-periodic task. - The republican scientific magazine "YuK Science and Education" No. 34, **2003** of, - page 25-30.
- [16] *Levitan B. M.* Inverse Sturm–Liouville Problem. VSP, Utrecht, **1987**.
- [17] Lorenzi and S. I. Kabanikhin, Identification Problems of Wave Phenomena. VSP, Utrecht, **1999**.
- [18] F. Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography. New York, Wiley & Sons, **1986**.
- [19] V. G. Romanov, Inverse Problems of Mathematical Physics. VSP, Utrecht, **1987**.
- [20] N. Tikhonov, On the stability of inverse problems. Doklady Acad. Sci. USSR 39 (**1943**), 176–179.
- [21] A. N. Tikhonov, On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. Dokl. Akad. Nauk SSSR 151, 3 (**1963**), 501–504 (in Russian).
- [22] Tikhonov A. N. On the regularization of ill-posed problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR 153, 1 (**1963**), 49–52 (in Russian).
- [23] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York, **1977**.
- [24] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharkii, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, Regularizing Algorithms and A Priori Information. Nauka, Moscow, **1983** (in Russian)

УДК 517.9

М.Б. Сапрыгина¹, М.И. Акылбаев,² А.Ш. Шалданбаев³

¹Южно-Казахстанская государственная фармацевтическая академия, г.Шымкент;

²Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент;

³Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент

ОБРАТНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Оператор Штурма-Лиувилля с периодическими граничными условиями обладает внутренней симметрией, проявлением этой симметрии является наличие кратного спектра этого оператора, что служило препятствием постановки обратной задачи. Кратный спектр порождает не тривиальных инвариантных подпространств. В настоящей работе показано, что проекторов этих инвариантных подпространств можно использовать для восстановления правой части уравнения, т.е. доказана теорема единственности.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, полнота, базисность, собственные векторы, функция Грина, ряды Фурье, спектр, собственные значения, обратная задача, правая часть.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 146 – 152

UDC 622.011.4+623.024

T.K. Koysheva¹, Zh.Zh. Kozhamkulova², B. Sabit³

¹International Kazakh-Turkish University, Turkestan;

^{2,3}Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty

¹k.tur@mail.ru, ²ekojaz@mail.ru, ³sabit_botakoz@mail.ru

TRAINING IN HIGHER EDUCATION FOR FUTURE TEACHERS ON THE BASIS OF OBJECT-ORIENTED DESIGN

Annotation. The article describes a model of professional training of future teachers on the basis of object-oriented design in learning information technology at the university. Methods of teaching programming should conform to modern developments in computer science, so there is an urgent need for a thorough study of the methodology of object-oriented programming. The article describes a model of professional training of future teachers on the basis of object-oriented design in learning information technology at the university. Given the current pace of technology development, we can say with certainty when it comes to learning programming, even the most devoted to his/her work programmer lives with a sense of constant ascent up the mountain. So many it is necessary to learn, so little time for this. Given the above, the problem of the study due to the contradiction between the existing approaches to the study of object-oriented programming is not implementing methods and tools for object-oriented design to implement object-oriented decomposition, a visual representation of the model of the designed application software, automated generation of code using specialized software tools, and the current level of development in the field of theory and means of object-oriented programming and object-oriented design.

Key words: model, pedagogy, motivation, design, object-oriented.

Т.Қ. Қойшиева¹, Ж.Ж. Қожамқұлова², Б. Сабит³

¹Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан;

^{2,3}Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРНЫНДА БОЛАШАҚ МҰҒАЛІМДЕРДІ ОБЪЕКТІЛІ-БАҒДАРЛЫ ЖОБАЛАУ НЕГІЗІНДЕ КӘСІБИ ДАЙЫНДАУ МОДЕЛІ

Аннотация. Бұл жұмыста жоғары оқу орнында ақпараттық технологияларды оқыту кезінде болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделі көрсетілген. Бағдарламалауға оқыту әдістемесі компьютерлік ғылымның заманауи құрылымдарына сәйкес келуі керек, сондықтан да объектілі-бағытталған бағдарламалау әдістемесін тереңдетіп игеруге деген қажеттілік туындауда. Мақалада жоғары оқу орындарында ақпараттық технологияларды оқыту барысында объектілі-бағытталған жобалау негізінде болашақ педагогтарды кәсіби дайындау үлгісі келтірілген. Қазіргі кездегі технологияның шарықтап даму дәуірінде бағдарламалауды оқу барысында тіпті өз ісіне берілген маманның өзі қиындықтарды сезінеді. Игерілуі тиіс мәліметтер көп, уақыт жетіспей жатады. Осы мәселелерді ескере келе, бұл зерттеуде объектілі-бағытталған бағдарламалауды оқытуда белгілі көзқарастар мен объектілі-бағытталған жобалау ортасында жобаланатын бағдарламалық қосымша үлгісін көрнекі көрсете білу. Арнайы бағдарламалық құралдар көмегімен бағдарламалық кодтың автоматты түрде құрылуы, объектілі-бағытталған бағдарламалауды жүзеге асырудың қазіргі заманғы құрылымдары келтіріледі.

Тірек сөздер: үлгі, педагогика, ынталандыру, құрылым, объектілі-бағытталған.

Еліміздегі жоғары білім берудің негізгі міндеті маманды тек қана біліммен қарулардырып қоймай, сонымен қатар олардың жеке басының жан-жақты қалыптасуына, дамуына, шығармашылық қабілетінің жетілуіне, кәсіби мәдениеттің қалыптасуына өз дәрежесінде көңіл бөлу, мүмкіндік жасау болып табылады. Студентті тек болашақ маман ретінде ғана қарамай, оны өз қоғамының азаматы, шығармашылық тұлға келешектің иесі, тірегі ретінде тану, соған мүмкіндік жасау қажет. Ал болашақ мұғалімдерді осы айтылғандарға сәйкес дайындау, оның құрылымдық-мазмұндық моделін жасаудан бастау алады [1].

Барлық модельдер әртүрлі формада өз объектілерін бейнелей отырып жалпы бір негізге сүйене отырып құрылады. Модельдермен жұмыс істеу объект туралы жаңа ақпарат алу және басқа тәсілдермен тану күрделі болған кездегі заңдылықтарды зерттеу мүмкіндігін береді. Модельдеу – үрдістер мен олардың күйін, нақты физикалық немесе идеалды, ең алдымен математикалық модельдер көмегімен зерттеудің теориялық әдісі [2]. Ғылыми таным үдерісінде модель түпнұсқаны алмастырады және оқып-үйренудің түпнұсқасы туралы ақпарат береді.

Педагогикадағы модель – оқып-үйренетін объектінің сипаттамаларын (компоненттерін, элементтерін, қасиеттерін, қатынастарын, параметрлерін және т.б.) тану мақсатында объектіге ұқсастықты немесе оны алмастыруды жаңғырту және оны зерттеу, ол объект туралы білімдерді алу үшін қызмет ететін, таным объектісі туралы ақпаратты бірмәнді түрлендіретін, тәжірибелік тексеру мүмкін болатындай ақпарат беретін зерттеуші таңдаған немесе құрастырған жүйе [3-5].

Біз модельдеу әдісін болашақ мұғалімдердің объектілі-бағдарлы жобалау іскерлігін қалыптастыру моделін жасауда пайдаланамыз. Сонымен біз, қазіргі кезде ғылым мен техниканың жетістіктерін кәсіби маман дайындау үдерісінде пайдалану маңызды екендігін, ал бірақ сол негізде болашақ мамандарға білім беру әлі де жеткіліксіз екендігін айқындадық. Бұл бағытта ұсынылған арнайы тұжырымдама негізінде, арнайы модельді ұсыну қажеттігі туады. Болашақ мұғалімді ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау (АТОМОБЖ) негізінде кәсіби дайындау моделі – ЖОО-да болашақ мұғалімді дайындауға әлеуметтік тапсырысын, маманның кәсіби біліктілігі деңгейіне қоғамның талабын, студенттің бәсекеге қабілетті білім алуға талабын, студенттерге АТОМОБЖ негізінде оқу үдерісін ұйымдастыру және АТОМОБЖ іскерлігін қалыптастыру технологиясын қамтиды (Сурет 1).

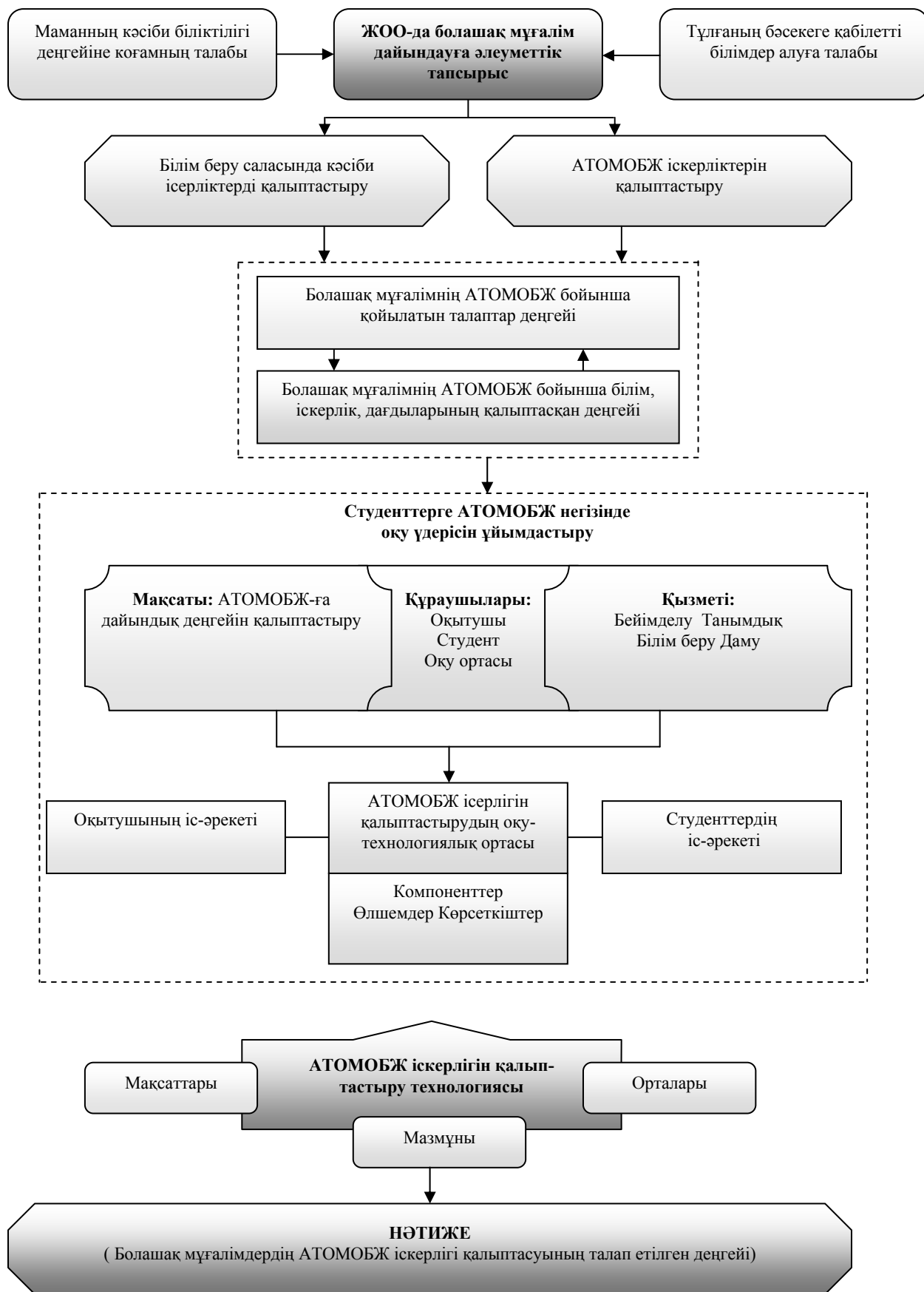
Болашақ мұғалімнің моделін құрастыруда біз модель мыналарды бейнелейді деген тұжырымдарға сүйенеміз:

- талаптарды, олар қоғам тарапынан болашақ мамандарды кәсіби даярлаудың сапасына қойылады;
- зерттеулердің негізгі идеяларын, олар болашақ мұғалімдердің кәсіби іскерліктерін, АТОМОБЖ іскерліктерін қалыптастыруды оңтайландыру проблемасы бойынша ұсынылады;
- студенттерде АТОМОБЖ іскерлігін қалыптастыру жоғары оқу орындарында оқытудың біртұтас педагогикалық үдерісін ұйымдастыруда;
- оқыту мазмұнын, ғылыми, жалпы кәсіби және арнайы кәсіби сипаттағы білім, іскерліктер мен дағдылар түрінде алынуда;
- негізгі өлшемдерді және деңгейлер көрсеткіштерін, болашақ маманды даярлаудың сапасын анықтауда.

XXI ғасырда болашақ мамандарды даярлау, олардың кәсіби іскерлігін қалыптастыру мәселелері – кезек күттірмейтін өзекті қоғам талабы. Осы орайда, біз болашақ мұғалімдердің ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды қолдануға даярлығының құрылымдық-мазмұндық моделін жасадық (Кесте 1).

Модель болашақ мұғалімдердің сапасына қойылып, зерттеу идеясын болашақ маманды дайындауды оңтайландыру мәселесі бойынша, осы қарастырылып жатқан проблеманы студенттерге оқытудың тұтас бір кәсіби дайындау жүйесін құруда негізгі рөл атқарады [6-7].

Техникалық, ақпараттық құралдар туралы мәселелер басым қарастырылатындықтан - болашақ мұғалімдерде мотивациялық компонент, осы тұрғыда танымдық, бейімділікке арнайы талап болатындықтан мазмұндық компонент, ал ең бастысы практикалық қолдану болғандықтан болашақ мұғалімдерде іс-әрекеттік пен операционалдық компоненттер болуы қажеттілігін модельде ескердік [8,20].



Сурет 1 - Болашақ мұғалімді АТОМОБЖ негізінде кәсіби дайындау моделі

Кесте 1 - Болашақ мұғалімдердің ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды қолдануға даярлығының құрылымдық-мазмұндық моделі

Компоненттер	Өлшемдер	Көрсеткіштер
Мотивациялық	-Өзінің кәсіби шеберлігін ақпараттық-компьютерлік технология бойынша дамытуға талпынуы - ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауға қызығушылық таныту	-Кәсіби жеке біліктілік деңгейін көтеруге бағыттылығы -Ақпараттық және компьютерлік технология бойынша инновациялық іс-әрекетке ұмтылуы -Ақпараттық жүйелерді жобалау, компьютерлік модельдеу туралы мотивтер -Мультимедиялы технологияларды қолдануға ұмтылуы
Мазмұндық	-Өзінің ақпараттық және компьютерлік технология бойынша сауаттылығы - ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау туралы білімдер жүйесі	-Педагогикалық іс-әрекет теориясының кәсіби біліктілік тұрғысындағы негіздерін білуі -Барлық мүмкіндіктерді ескере отырып, инновациялық іс-әрекеттің көбіне нәтижелі болғандығын сезінуі -Ақпараттық жүйелерді жобалауды, компьютерлік модельдеуді түсінуі -Мультимедиялық технологиялар туралы түсінік -Пән сабақтарында компьютерлік модельдеуді қолдану керектігін түсіне білуі
Іс-әрекеттік	-Өзінің кәсіби іс-әрекетін инновациялық тұрғыда меңгеру - ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды қолдану іскерлігі	-Ақпараттық-компьютерлік технология негізінде іс-әрекетін инновациялық тұрғыда шеше алуы -Ақпараттық жүйелерді модельдеуді меңгеру -Компьютерлік модельдеуді игеруі - Мультимедиялы технологияларды қолдана алуы -Пән сабақтарында ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды қолдану мүмкіншілігін меңгеруі
Операционалдық	-Өзінің педагогикалық іс-әрекетін ұйымдастыруда модельдеуді қолдануы -АТОМОБЖ мұғалімнің ақпараттық және алгоритмдік іс-әрекетінің негізгі элементі ретінде	-Зағтарды, құбылыстарды объектілі жобалау негізінде сипаттай алуы - ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауға негізінде оқыту құралдарын жасауы -Модельдерді сандық және сапалық бағалауды жетік меңгеруі -Оқу үдерісінде АТОМОБЖ іскерліктері мен дағдыларын еркін қолдануы

Мотивациялық компонентке танымдық қызығудың негізгі қалыптастыру бейнесі жатады. Оған болашақ мұғалімнің өзінің кәсіби шеберлігін дамытуға талпынуы, кәсіби жеке біліктілік деңгейін көтеруге бағыттылығы, инновациялық іс-әрекетке ұмтылу әрекеттері, ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауға қызығушылығы кіреді.

Мазмұндық компонентке болашақ мұғалімнің жалпы мәдениеттілік дайындығы мен пәндік әдіснамалық дайындығының деңгейі, мамандығы бойынша білімі, педагогикалық біртұтас білім жүйесі, біртұтас педагогикалық үдерістің заңдылықтары мен қозғаушы күштерінің жалпы теориялық білім негіздерімен қарулануы, ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау туралы түсінігі, білімдер жүйесі кіреді [9-12].

Оған біртұтас педагогикалық үдерістің теориялық негіздерін меңгеруі, жеке тұлға теориясының ғылыми негіздерін меңгеруі, педагогикалық іс-әрекет теориясының кәсіби біліктілік тұрғысындағы негіздерін білуі, оқушылардың барлық мүмкіндіктерін пайдалануға инновациялық іс-әрекеттің көбіне нәтижелі болатындығын сезіне алу жатады.

Іс-әрекеттік компонент болашақ мұғалім өзінің кәсіби іс-әрекетін инновациялық тұрғыда меңгере алуы мен міндетін анықтай алуы, сондай-ақ ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауға негізделген педагогикалық үдерісті тиімді жүзеге асыра алуымен өлшенеді. Ол болашақ мұғалімнің өз пәнін жете меңгеруі, біртұтас оқыту үдерісінің психологиялық-педагогикалық жағдаятын жоспарлап, жүзеге асыра алуымен сипатталады.

Операционалдық компонент болашақ мұғалім өзінің кәсіби іс-әрекетін ұйымдастыруда жобалауды қолдана алуымен, яғни жалпы жобалаудың негізгі кезеңдерін, формальдаудың негізгі әдістері мен тәсілдерін, жобалаудың қасиеттерін, ақпараттық жобалау тілдерін жоғары деңгейде меңгеруі, ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды

мұғалімнің ақпараттық және алгоритмдік іс-әрекетінің негізгі элементі ретінде тиімді жүзеге асыра алуымен өлшенеді. Ол болашақ мұғалімнің кәсіби іс-әрекетінде ғылыми таным әдісі ретінде жобалауды қолдана отырып, оқыту құралдарын жасай алуы, ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды еркін қолдану іскерліктері мен дағдылары және оны оқу үдерісінде жүзеге асыра алуымен сипатталады [13,19].

Сонымен, болашақ мұғалімдердің ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалауды қолдануға даярлығы: мотивациялық құндылықтарды; мазмұндық, іс-әрекеттілік және операционалдық сияқты көрсеткіштерді қамтиды. Осы аталған көрсеткіштердің әсерінен білім, іскерлік, дағды, кәсіп, іскерлік, іс-әрекет, игеру, нәтижелері құралады.

Модельдің негізінде әртүрлі көрсеткіштерді сипаттайтын деңгейлерді де (төмен, орташа, жеткілікті, жоғары) анықталды [20, 21].

Осы келтірілген деңгейлерді АТОМОБЖ негізінде қалыптастыру үшін теориялық және практикалық даярлық жүйесі қажет. Ол арнайы мамандық пәндер циклі арқылы қамтамасыз етіледі. Ал мамандық пәндерді оқыту АТОМОБЖ негізінде кәсіби дайындау әдістемесі арқылы жүзеге асырылады.

Мектепке осындай инновациялық даярлықпен келген жас маман болашақта оқу-тәрбие үдерісінің сапасын арттыруда өзінің қомақты үлесін қоса алатын болады. Біз жоғары оқу орнында болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделін келтірдік. Модель теориялық-әдіснамалық және ғылыми-әдістемелік тұрғыда негізделді. Осы модельге сәйкес болашақ мұғалімдерді ақпараттық технологиялардың қазіргі заманғы құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау әдістемесін жүзеге асыруға болады.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Н.Назарбаев. Қазақстан 2030. Алматы: Юрист, 2003. 131б.
- [2] Моделирование деятельности специалиста на основе комплексного исследования. Под редакцией Е.Э.Смирновой. Ленинград, 1984. 177с.
- [3] Педагогика профессионального образования. Под редакцией В.А.Сластенина. М.:АКАДЕМА, 2004, 368с.
- [4] М.Т.Громкова. Психология и педагогика профессиональной деятельности: Учебное пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003, 415с.
- [5] Е.В.Михеева. Информационные технологий в профессиональной деятельности. М.:Академия, 2006. 384с.
- [6] Лапчик М.П. и др. Теория и методика преподавания информатики. М.:Академия, 2001. 624 с.
- [7] Сыдықов Б.Д. Болашақ мұғалімдерді ақпараттық-компьютерлік және математикалық модельдеу негізінде кәсіби дайындау жүйесі. Пед.ғыл.докторы дисс... авторефераты. Түркістан, 2008. 44 б.
- [8] И.Г.Захарова. Информационные технологии в образовании. Учеб. пособие для студ.высш.учеб.заведений. М.:ИЦ «Академия», 2005. 192с.
- [9] Педагогические условия формирования информационно-технологической компетенции у будущих педагогов профессионального обучения // Инновационные технологии в повышении качества образования: материалы международной научно-практической конференции. В 3 ч. Омск: Изд-во Омского экономического института, 2006. Ч. 1. С.106–110 (в соавторстве с Егоровым В.В., Смирновой Г.М.).
- [10] Технология формирования профессиональной компетентности педагога профессионального обучения // Актуальные проблемы современности: междунар. научн. журнал. Караганда: Болашақ. Баспа, 2006. № 2. С.143–145 (в соавторстве со Смирновой Г.М., Ударцевой С.М.).
- [11] Технологическая компетентность педагога профессионального обучения // Казахстан и Россия: путь дружбы, диалог культур, интеграция образования науки: материалы международной научно-практической конференции. В 2 т. – Кокшетау: ТОО «Копировальный центр», 2006. Т.1. С.162–166 (в соавторстве с Егоровым В.В., Смирновой Г.М.). 2721319
- [12] Системный подход к формированию технологической компетентности будущего педагога профессионального обучения // Социально-экономические проблемы развития муниципального управления: теория и опыт: сб. научн. тр. по материалам международной конференции. Новосибирск: НГАУ, 2006. С.101–104 (в соавторстве с Егоровым В.В., Смирновой Г.М.).
- [13] Современная техника и технологии в производственной сфере (учебно-методический комплекс для специальности 050120– Профессиональное обучение). Караганда: Изд-во КарГУ, 2007. 105 с. (в соавторстве с Ударцевой С.М.).
- [14] Профессиональная подготовка специалистов в условиях информатизации общества // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АППП-2004): материалы международной научной конференции (Гуманитарные науки и образование). Тольятти: Волжский университет им. В.Н. Татищева, 2004. Ч.1. С.114–119 (в соавторстве со Шкутиной Л.А.).
- [15] Инновационная деятельность в учебном процессе // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АППП-2004): материалы международной научной конференции (Управление образованием & Информационные технологии). Тольятти: Волжский университет им. В.Н. Татищева, 2004. С. 89–93 (в соавторстве с Мишуковой Т.Н.).

- [16] Информатизация системы образования Республики Казахстан // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АПНП–2004): материалы международной научной конференции (Управление образованием & Информационные технологии). Тольятти: Волжский университет им. В.Н. Татищева, 2004. С.128-132.
- [17] Влияние профессионально важных качеств на профессиональное становление личности // Педагогические проблемы информационно-технологической подготовки специалистов высшей школы: сб. научных трудов. Караганда: Изд-во КарГУ, 2004. С.20–25 (в соавторстве со Смирновой Г.М., Ударцевой С.М.).
- [18] Компетентностный подход в подготовке педагога профессионального обучения // Вестник ПГУ. 2006. № 1. С.140–147.
- [19] Тажигулова А.И. Конструирование электронных учебников // Научно-практический журнал “Информационные технологии в Казакстане”, №1, 2000. 2-3с.
- [20] С.Бешенков, Е.Ракитина. Моделирование и формализация. Методическое пособие. М.:ЛБЗ, 2002. 336 с.
- [21] Образцов П. И. Психолого-педагогические аспекты разработки и применения в вузе информационных технологий обучения. Орловский государственный технический университет. Орел, 2000. 145с.

REFERENCES

- [1] Nazarbaev N. Kazakhstan 2030. Almaty: Lawyer, 2003. 131p.
- [2] The modeling of a specialist on the basis of a comprehensive study. Edited E.E. Smirnova. Leningrad, **1984**. 177p.
- [3] Pedagogy of professional education. Edited B.A.Slastenina. M.:ACADEMA, **2004**. 368p.
- [4] Gromkova M.T. Psychology and pedagogy of professional activity: Teaching aid for universities. M.: YUNITI-DANA, **2003**. 415p.
- [5] Miheeva E.V. Information technologies in professional activity. Moscow: Academy, **2006**. 384p. (in Russ.).
- [6] Lapchik M.P, Semakin IG, Henner EK Methods of teaching of computer science. M.: Academy, **2001**. 624 p. (in Russ.).
- [7] Sidikov B.D. The system of training of future teachers based on ICT and mathematical modeling. Turkestan., **2008**. 44 p.
- [8] Zaharova I.G. information technology in education. proc. allowance for stud.myssh.ucheb.zavedeny. Moscow: ITS "Academy", **2005**. 192S. (IN RUSS.).
- [9] Pedagogical conditions of formation of information-technological competence of future teachers of vocational training // Innovative technologies to improve the quality of education: proceedings of the international scientific-practical conference. In 3 hours - Omsk Univ. Of Omsk Economic Institute, **2006**, Part 1, P.106-110 (in collaboration with Egorov VV, Smirnova GM).
- [10] The technology of formation of professional competence of the teacher of vocational training // Actual problems of the present: Intern. Scien. Journal. Karaganda: Bolashak-Baspa, **2006**. № 2. p.143-145 (together with Smirnova GM, Udartseva SM).
- [11] The technological competence of vocational training of the teacher // Kazakhstan and Russia: the path of friendship, cultural dialogue, integration of education science: proceedings of the international scientific-practical conference. In 2 tons - Kokshetau.: TOO "Copy center", **2006**, T.1, P.162-166. (in collaboration with Egorov VV, Smirnova GM).
- [12] A systematic approach to the formation of the technological competence of the future teacher of vocational training // Social and economic problems of municipal management: Theory and Experience: Sat. Scien. tr. on materials of the international conference. Novosibirsk: NSAU, **2006**, p.101-104. (together with Egorov VV, Smirnova GM).
- [13] Modern techniques and technologies in the industrial sector (training complex for the specialty 050120 - Vocational training). Karaganda: Publishing house of the University, **2007**. 105p. (Co-authored with Udartseva SM).
- [14] Training experts in the conditions of information society // Tatishevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the International Conference (Humanities and Education). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishchev, **2004**, Part 1, P.114-119 (in collaboration with Shkutin LA).
- [15] The innovative activity in educational process //Tatishevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the international scientific conference (Education Management & Information Technologies). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishchev, **2004**, P.89-93 (in collaboration with Mishukova TN).
- [16] Education System Informatization of the Republic of Kazakhstan // Tatishevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the international scientific conference (Education Management & Information Technologies). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishchev, **2004**, P.128-132.
- [17] The effect of professionally important qualities in the professional formation of the person // Pedagogical Issues tehnologiicheskoy information and training specialists of high school: Sat. scientific papers. Karaganda: Publishing house of the University, **2004**, P.20-25 (in collaboration with Smirnova GM, Udartseva SM).
- [18] Competence approach in the preparation of the teacher of vocational training // PSU Bulletin. **2006**, № 1, p.140-147.
- [19] Tazhigulova AI.Kostruirovanie electronic textbooks //Scientific journal "Information Technologies in Kazakstan", №1, **2000**, 2-3p.
- [20] Beshenkov S., Rakitina E. Modeling and formalization. Toolkit. MM: LBZ, **2002**. 336 p. (in Russ.).
- [21] Samples PI Psycho-pedagogical aspects of development and implementation of the university information technology training. Orel State Technical University. Eagle, **2000**, 145p. (in Russ.).

Т.К.Койшиева¹, Ж.Ж., Кожамкулова² Б. Сабит³,

¹Международный казахско-турецкий университет имени А.Яссави, Туркестан

^{2,3}Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы

**ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ
В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ НА ОСНОВЕ
ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Аннотация. В настоящее время методология объектно-ориентированного программирования является ведущей в информационной технологии. Методика обучения программированию должна соответствовать современным разработкам в компьютерных науках, поэтому существует насущная потребность в глубоком изучении методологии объектно-ориентированного программирования. В статье описаны модель профессиональной подготовки будущих учителей на основе объектно-ориентированного проектирования в процессе обучения информационным технологиям в вузе. Учитывая современные темпы развития технологий, можно с уверенностью сказать, когда речь идет об изучении программированию, даже самый преданный своему делу программист живет с ощущением постоянного подъема в гору. Так много необходимо изучать, и так мало для этого времени. Учитывая вышеизложенное, проблема исследования обусловлена противоречием между существующими подходами к изучению объектно-ориентированного программирования, не реализующими методы и средства объектно-ориентированного проектирования, направленные на осуществление объектно-ориентированной декомпозиции, наглядное представление модели проектируемого программного приложения, автоматизацию создания программного кода с использованием специализированных программных инструментов, и современным уровнем разработок в области теории и средств реализации объектно-ориентированного программирования и объектно-ориентированного проектирования.

Ключевые слова: модель, педагогика, мотивация, разработка, объектно-ориентированный.

NEWS**OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 153 – 160

G.B. Issayeva, A.M. BeisenovaKazakh State Women's Teacher Training University, Almaty
Guka_issaeva@mail.ru**THE VIRTUAL MACHINES, ADVANTAGES OF THE VIRTUAL
MACHINES AND VIRTUALIZATION LEVELS**

Annotation. In this article it is considered the virtual machines, advantages of the virtual machines and virtualization levels. Now the role of the virtual machines is especially important.

Data centers, including a lot of space and energy forms the cooling infrastructure. Virtualization is the majority of consolidated servers as their physical servers. This will increase the number of servers with high bandwidth.

The number of physical machines is determined by the quality of the server. Therefore, reduce the amount of energy needed to expand the area of their distribution. Reducing the number of servers, space, energy consumption will continue to grow. At the same time increases the amount of carbon dioxide. When this loss of energy, this indicator exceeds the threshold value, is of great importance in Europe.

In conclusion, our views on the needs of business institutions, organized workflow. The attributes of personal computers for the last ten years in the performance of official duties, office tasks have been determined. At the same time, business needs arise. As a real tool for users there will be a number of vehicles from corporate information systems. As a result of active development of the "cloud" are excluded from the calculation, the user's own data. Thus, the infrastructure is managed, included in the programs.

Key words: the virtual machine, virtualization levels, operating systems, server, encapsulation, visualization, application.

Г.Б. Исаева, А.М. Бейсенова

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы қаласы

**ВИРТУАЛДЫ МАШИНА ЖӘНЕ ВИРТУАЛДЫ МАШИНА
ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ МЕН ВИРТУАЛДАНУ ДЕҢГЕЙЛЕРІ ЖАЙЛЫ
ЖАЛПЫ МӘСЕЛЕЛЕР**

Аннотация. Бұл мақалада виртуалды машина және виртуалды машина ерекшеліктері мен виртуалдану деңгейлері жайлы жалпы мәселелер қарастырылған. Бүгінгі таңда виртуалдық технологиялар аса маңызды мәселеге айналып отыр. Мәліметтерді өңдеу орталықтары көптеген кеңістік пен энергияларды қамти отырып, оны суытып, инфрақұрылымдарды қалыптастырады. Виртуалдану құралы ретінде серверлер консолидацияланып, олардың көпшілігі физикалық серверлерде болады. Осылайша жоғары өнімділіктегі серверлердің саны арта түседі.

Физикалық машиналардың саны арқылы сервер жұмысының сапасы анықталады. Демек оған қажетті энергия мөлшері кеміп олардың таралу аумағы кеңейтіледі. Серверлердің санын кеміте отырып, кеңістіктегі энергиялық шығыны арта түседі. Осы кезде көмірқышқыл газының мөлшері арта түседі. Осы кезде энергиялық шығыны пайда болып, аталмыш көрсеткіш Европада шекті мәннен асып, маңызды болып отыр.

Программалауды оқытуда қолданылатын оқыту технологияларының ерекшеліктері

Қорыта келе, бизнестің қажеттілігі арқылы біздің көзқарастарымыз қалыптасып, жұмыс үрдісі ұйымдастырылады. Жеке компьютер арқылы соңғы он жылда кеңселік атрибуттар анықталып, кеңселік тапсырмалар орындалып шықты. Осы арада бизнестік қажеттіліктер туындап отырады. Қолданушылардың нақты құралы ретінде тек КҚ алынып, корпоративтік ақпараттық жүйелердің қатары алынады. Белсенді даму

нәтижесінде "бұлттық" есептеулер алынып, қолданушылар өзіндік мәліметтерін алады. Демек инфрақұрылымдар басқарылып, бағдарламалармен қамтылады. Осы арада өзара жұмыс барысы туындайды.

Тірек сөздер: виртуалды машина, виртуалдану деңгейлері, операциялық жүйелер, сервер, инкапсуляция, көрініс, қосымша.

Зерттеу әдістемесі және жалпы ақпараттар

Виртуалды машина дегеніміз бағдарламалар мен құрал ортасы немесе оларды жүзеге асыра отырып, көріністерді қалыптастырамыз. Үрдістер қамтылып орындалады.

Виртуалды машина – бұл толық оқшауланған бағдарламалардың контейнері, сондықтан физикалық компьютер болып табылады. Виртуалды машина физикалық компьютер секілді қызмет атқарады (сурет 1). Ал оның құрамында виртуалды қатты дискілер мен желілік адаптер болады.

ОЖ арқылы әртүрлі виртуалды және физикалық машиналарды ажырата аламыз. осылайша қосымшалар мен жеке компьютерлер пайда болады. Осыған қарамастан бағдарламалық компоненттер қалыптасып, олардың құрамына түрлі жабдықтар кіреді. Демек, тамаша артықшылықтар арқылы физикалық жабдықтардың жұмысы реттеледі.



Сурет 1 - Виртуалды машина

Виртуалдық машиналардың ерекшеліктерін қарастырамыз, демек:

Үйлесімділік. Виртуалды машиналар әдетте стандартты компьютерлермен үйлесім тапқан. Сондықтан физикалық компьютер секілді, өзіндік басқарулармен операциялық жүйелерді (ОЖ) орындап шығады. Өзіндік қосымшалары болады. Сондықтан виртуалдық машиналар толық стандартты операциялық жүйелермен қамтылып, драйверлік қондырғылармен жабдықталады. Виртуалдық машиналар арқылы кез-келген бағдарламаларды қолданып, физикалық компьютер жұмысын атқарамыз.

Оқшауландыру. Виртуалдық машиналар бір-бірінен толық оқшауланып, физикалық компьютер ретінде беріледі. Виртуалдық машиналар көмегімен физикалық ресурстар қолданылып, осы кезде толық физикалық машиналар пайдаланылады. Виртуалды машиналар жеке бөлшектерден тұрады. Мысалы, егер бір ғана физикалық серверлер төрт виртуалды машинаға жіберілсе, онда олардың бірі істен шығады. Ол қалған үш машинаға әсер етеді. Оқшаулану дегеніміз-аса жоғары және қауіпсіз қосымша, яғни виртуалды ортада жүзеге аса отырып, стандартты, виртуалды емес жүйелермен орындалады. Инкапсуландыру. Виртуалды машиналар толық есептеу ортасында инкапсуланады. Виртуалды машина дегеніміз бағдарламалық контейнер, сондықтан инкапсуланған толық виртуалдық құрал ресурстарын жинақтай отырып, ОЖ арқылы бағдарламалық пакеттерді береді. Осыған байланысты виртуалдық машиналар инкапсуляцияланып отырып, мобильді және қолайлы болады. Демек басқару қолайлығын тудырады. Мысалы, виртуалды машиналар арқылы жүйелерді бір орыннан екінші орынға көшірмелей аламыз, яғни осы арада мәліметтер стандартты түрде сақталады. Ол үшін жинақты Flash карталар қолданылады, яғни есте сақтау USB мәліметтерді корпоративтік желіде орындап шығады.

Құрал-жабдықтардың тәуелсіздігі. Виртуалды машиналар толығымен базалық физикалық жабдықтарға байланысты жұмыс атқарады. Мысалы, виртуалдық машиналардың компоненттері болады (орталық процессор, желілік карта, SCSI бақылаушы). Осы құрылғылар арқылы физикалық сипаттамаларды алып, олардың абсолюттік шамасын белгілейміз. Осылайша құрал-жабдықтармен қамтимыз. Виртуалдық машиналар арқылы операциялық жүйелер орындалады (Windows, Linux

және т.б). Олар бір ғана физикалық серверде орын алған. Осы үйлесімдерді қарастыра отырып, олардың қозғалысын инкапсуляциялап, үйлесімділігін тексереміз. Виртуалды машиналар x86 базасынан екіншісіне еркін өтеді. Осылайша драйверлер мен қосымшалар алынады. Құрал-жабдықтарсыз осындай мүмкіндіктер туындап, абсолюттік ОЖ пайда болады. Яғни физикалық компьютерге жазылады.

Негізгі виртуалдандыру түрлерін қарастырып шығамыз, атап айтсақ:

Серверлерді виртуалдандыру (толық виртуалдандыру және жұптық виртуалдандыру)

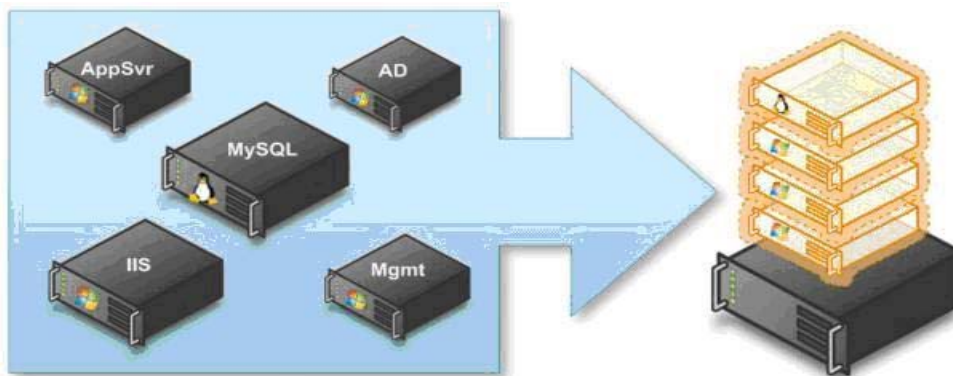
Операциялық жүйе деңгейіндегі виртуалдандыру,

Қосымшаларды виртуалдандыру,

Ұсыныстарды виртуалдандыру.

Серверлерді виртуалдандыру

Бүгінгі таңда виртуалдық технологиялар туралы сөз қозғамағанда олардың серверлері виртуалданып, соңғылары аса маңызды мәселеге айналып отыр. Демек IT нарығы қалыптасқан. Серверлерді виртуалдандыру бойынша бірнеше виртуалды серверлер іске қосылады (сурет 2). Виртуалды машиналар немесе серверлер арқылы қосымшалар енгізіліп, хосталық операциялық жүйелер енгізіліп, серверлердің физикалық қондырғысы қалыптасады. Осы аталмыш виртуалдық машиналарда операциялық жүйе қалыптасып, олардың қызметі белгіленеді. Типтік ұсыныстар бойынша оның өнімдері анықталады, атап айтсақ VmWare (ESX, Server, Workstation) және Microsoft (Hyper-V, Virtual Server, Virtual PC).



Сурет 2 - Серверлерді виртуалдандыру

Мәліметтерді өңдеу орталықтары көптеген кеңістік пен энергияларды қамти отырып, оны суытып, инфрақұрылымдарды қалыптастырады. Виртуалдану құралы ретінде серверлер консолидацияланып, олардың көпшілігі физикалық серверлерде болады. Осылайша жоғары өнімділіктегі серверлердің саны арта түседі.

Физикалық машиналардың саны арқылы сервер жұмысының сапасы анықталады. Демек оған қажетті энергия мөлшері кеміп олардың таралу аумағы кеңейтіледі. Серверлердің санын кеміте отырып, кеңістіктегі энергиялық шығыны арта түседі. Осы кезде көмірқышқыл газының мөлшері арта түседі. Осы кезде энергиялық шығыны пайда болып, аталмыш көрсеткіш Европада шекті мәннен асып, маңызды болып отыр.

Аса маңызды емес фактор ретінде қаржылық жақтарын аламыз. Виртуалдандыру арқылы үнемділік пайда болады. Сондықтан қажеттіліктерді кемітіп, қосымша серверлерді қолданамыз. Осылайша талаптар мен таралымдар кеми береді. Виртуалды серверлерді қолдана отырып жылдам енгізіледі, басқарылады, сондықтан ол арқылы кез-келген жобалар орындалады.

Соңғы жылдары жаңа үлгідегі процессорлар пайда болған, демек x86 сәулелі AMD және Intel корпорациялары орындалған, мұндағы өндірушілер алғаш рет виртуалды құрал технологиясын енгізген. Осыған дейін виртуалдандыру бірнеше бағдарламалармен сипатталған болатын, бірақ мұның барлығы өндіріс шығындарын анықтап бермеді.

80-жылдары пайда болған жеке компьютерлік мәселелер виртуалды құрал ресурстарымен жабдықталып, өздігінше сипат берген болатын. Дегенмен кез келген өзіне қажетті ақпараттарды

осы жеке компьютерден алып отырады. АТ санын арттыру үшін қолданыс аясы 0x86– жүйесін кеңейте отырып, жағдай бірден өзгеріп шыға келеді. "Диалектикалық спираль" пайда болып, орауыштар өз кезегін күтіп жатты. Демек есептеу ресурстарының концентрациялары қалыптасты. Бастапқы он жылдықта өндірістер қызығушылық таныта отырып, жаңа технологиялар қарқын- дады. Осылайша x86 сәулеті өз жұмыстарын жалғастырды.

X86 идеялары виртуалдана отырып, теориялық жоспармен беріліп, сапалы АТ туралы сөз қозғалған болатын осылайша 20 жылдық салыстырмалы кезеңдер қатары арта түсті. Құралдық- бағдарламалық сәулет бойынша мейнфреймдер мен Unix– компьютерлер мәселесі виртуалданып, базалық деңгейлерде құралдық деңгейлер қатар жүрді. x86 жүйесі қалыптасып, датацентрлік режимдер есептеліп, виртуалдану бағыттары анықталған болатын. Күрделі эволюциялық үрдістер арқылы бірнеше мәселе шешімін тапты.

Сапалы әртүрлі бизнес арқылы мейнфреймдер мен x86 дами отырып, бірінші жағдай бойынша нақты моновендорлық бағдарламалық-құралдық кешендер қолданыс тауып жүзеге асты КҚ саны шектеліп, ірі сұраныс берушілер саны артты. Екінші жағдай бойынша туынды техникалар қауымдастығы қалыптасып, қолданбалы бағдарлама жасап шығаратын қатар берілген. x86– виртуалдау құралдарын қолдана отырып,90 жылдардың соңында бірнеше жұмыс бекеттері қызмет атқарған болатын. Бір мезетте клиенттік версилардың саны артып, адамдар саны да ұлғая бастады.

Серверлік инфрақұрылымдарды виртуалдай отырып, бірнеше жүйелер кейінен қолданысқа енген болатын дегенмен осы арада тәуелсіз бағыттар қалыптасты:

Біртекті емес операциялық ортаны ұстап тұру (соның ішінде белгіленген қосымшалар). Бұл жағдайлар корпоративтік ақпараттық жүйелерде кездесіп жатады. Техникалық мәселелер шешіліп, бір мезетте корпоративтік компьютерлер виртуалдық машинаға қосылады. Олар арқылы операциялық жүйелер алынады. Осы режимдерді жүзеге асыру жан-жақты қарастырылған: яғни толық виртуалдану мен жұптық виртуалдану;

Біртекті есептеу ортасын қолдау арқылы қызметтер оқшауланып, операциялық жүйелер арқылы провайдерлік қызмет хостингтері жүреді. Әрине осы арада оқшауланған контейнерлер арқылы бірнеше ядролар алынып, тиімді орта қалыптасты. x86 өмірлік циклдері бойынша визуалдау 2004– 2006 жж, жаппай қолданыстағы корпоративтік жүйелермен тығыз байланыста болады. Осыған сәйкес егер құрастырушы ертеде виртуалды ортаның технологиясын құрумен айналысса, онда басқару шешімдерімен толық корпоративтер интеграцияланып, АТ инфрақұры- лымдары қалыптасады. Бір мезетте сұраныс арқылы белгіленіп, тестер жүреді. Демек қолдану- шылар арасында мәселе туындап шығады.

Виртуалданудыру мәселесі бойынша туындаған көптеген қиындықтар бағдарламаларды қолдану арқылы шешімін тауып, бағдарламалық-құралдық x86 сәулеті өз орнын тапқан болатын ол үшін бірнеше базалық әдістер қолданылады:

Толық виртуалдану (Full, Native Virtualization). Операциялық жүйелердің модифицир-ленген нұсқалары қолданылмайды, демек осы ОЖ жұмысы сақталып, эмульсияланудың хосталық сипаты мен операциялық жүйелер келіп түседі. Мұндай технологиялар қолданылып, көптеген жағдайда VMware Workstation, VMware Server (бывший GSX Server), Parallels Desktop, Parallels Server, MS Virtual PC, MS Virtual Server, Virtual Iron қалыптасады. Аталмыш әдістердің басты ерекшелігі бойынша қосымша салыстырмалы даму мен әмебебаптылық байқалады, ол үшін басқару орындалып, ОЖ хостары кіреді. кемшіліктері арқылы қосымша шығындар енгізіліп, икемділік пен құралдардың қажеттіліктері туындап отырады (сурет 3).



Сурет 3 - Толық виртуалдану

Жұптық виртуалдану (paravirtualization). ОЖ ядролық модификациялары бойынша жаңадан жинақтар жиналып, API құрамына кіреді. демек құралдармен тура тікелей жұмыс жасай отырып, виртуалдық машиналар басқаларымен тығыз байланыста болады хосталық сапасы жүріп, аталмыш жағдайда арнайы жүйелер қолданылады. Демек ол гипервизор (hypervisor) деп аталды. Әсіресе осы вариант арқылы актуалды даму бағыттары орындалады, осы кезде аталмыш технологияның VMware ESX Server, Xen (осы технологияның мердігерлері арқылы шешімдер берілген), Microsoft Hyper-V бағдарламасы анықталады. Аталмыш технологияның артықшылығы бойынша хосталық ОЖ – VM анықталып, нақты құралдық ресурстар үнемделіп, тиімділік орныдалады. ОЖ мен гипервизорлық жүйелер құрылып арнайы факторлар беріледі (сурет 4).



Сурет 4 - Жұптық виртуалдану

ОЖ ядросындағы виртуалдану деңгейлері (operating system– level virtualization). Бұл вариант бойынша бірнеше ОЖ хостарының ядросы анықталып, паралельді түрде ядрооперациялық орта қалыптасады. Қолданушылар КҚ өзіндік желісін ашып, өзіндік құрал қоршауларын береді. Мұндай вариант арқылы Virtuozzo (для Linux и Windows), OpenVZ (тегін вариант Virtuozzo) и Solaris Containers қолданылады. Артықшылығы құрал ресурстарын қолдану тиімділігінің жоғары болуы, төмен техникалық шығындар, тамаша басқарулар, лицензиялық шығын минимумдары. Кемшіліктері-бірғана есептеу ортасын жүзеге асыру (сурет 5).



Сурет 5 - ОЖ деңгейлері бойынша виртуалдану

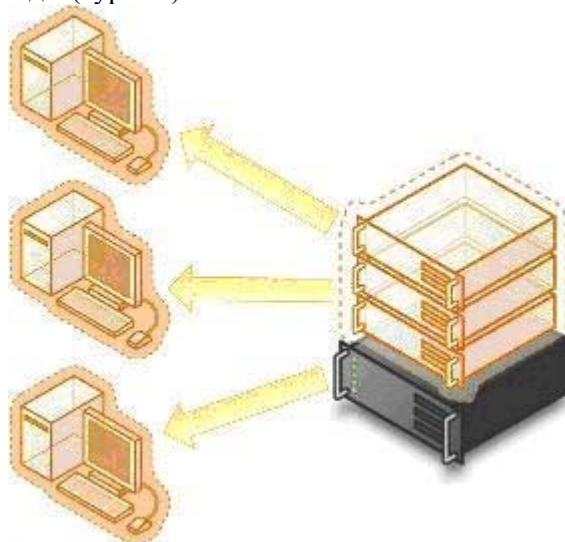
Қосымшаларды виртуалдай отырып, қолданбалы бағдарламалар өзара әрекеттерімен оқшаула- нып басқарылады. Осы арада қосымшалардың түрлері беріліп, негізгі құрамдас бөліктері анықталған: файлдар (жүйелерді қосқанда), реестрлер, шрифттер, INI– файлдар, COM– нысандар, қызметтер. Қосымшалар инсталляциялық шараларсыз орындалады, сондықтан оларды тек сақтағыштарда сақтап қаламыз (мысалы, флэш– карталар немесе желілік папкалар). АТ жеке артықшылықтардың сипатын алады: демек үстел үсті жүйелер мен оларды басқару мүмкіндігі жоғары, осыларды басқара отырып, өзара өзіндік қосымшалар минимумдарға ұмтылады. Аталмыш технология арқылы бір ғана компьютермен жұмыс жасалады. Сондықтан қосымшалар арасындағы қатынастар бір мезетте болады. Қосымшаларды виртуалдау арқылы серверлік қосымшалар алынады (сурет 6). Осы кезде қосымшалар бір-біріне тәуелсіз жұмыс жасайды, демек операциялық жүйелердің өзгерістері байқалады. Нақты алатын болсақ осындай виртуалдық түрлерге Sun Java

Virtual Machine, Microsoft Application Virtualization (ранее называлось Softgrid), Thinstall (2008 жылдың басында Vmware құрамына кірген), Symantec/Altiris жатады.



Сурет 6 - Қосымшаларды виртуалдау

Көріністерді виртуалдау (жұмыс орындарын) ұсыныстар мен көріністерді виртуалдау арқылы қолданушылардың интерфейстері эмульсияланған. Демек осы кезде қосымшалар арқылы терминалдар жұмысын атқарады. Осыған байланысты серверлер жойылады. Ал қолданушылар арқылы көріністер қосымшаларға беріледі. Жұмыс режимдеріне байланысты, жұмыс үстелі енгізіліп, терезелер қалыптасады (сурет 7).



Сурет 7 - Көріністерді виртуалдау

Қорыта келе, бизнестің қажеттілігі арқылы біздің көзқарастарымыз қалыптасып, жұмыс үрдісі ұйымдастырылады. Жеке компьютер арқылы соңғы он жылда кеңселік атрибуттар анықталып, кеңселік тапсырмалар орындалып шықты. Осы арада бизнестік қажеттіліктер туындап отырады. Қолданушылардың нақты құралы ретінде тек КҚ алынып, корпоративтік ақпараттық жүйелердің қатары алынады. Белсенді даму нәтижесінде "бұлттық" есептеулер алынып, қолданушылар өзіндік мәліметтерін алады. Демек инфрақұрылымдар басқарылып, бағдарламалармен қамтылады. Осы арада өзара жұмыс барысы туындайды.

Ұйымдық масштабтану арқылы АТ инфрақұрылымдар қалыптасып, АТ қолданылады. Осы арада күрделі қатарлар қалыптасады:

Компьютерлік парктерді қолдау барысында үлкен операциялық жүйелер қолданылады;

Үстелдік КҚ басқара отырып, олардың күрделі үрдістері қалыптасады;

ОЖ қамтыла отырып, қауіпсіз сенімді қосымшалар алынады, сонда қажетті жұмыстар орындалады;

Қолданушылардың техникалық қауіпсіздігі;
Техникалық қызметтер арқылы ПҚ лицензияларын қабылдаймыз;
Резервтік көшірмелену.

ӘДЕБИЕТ

[1] Стефенс Д.Р., Диггинс К., Турканис Д., Когсуэлл Д. - C++ Cookbook / C++. Сборник рецептов. М, КУДИЦ-Пресс, 2007 ж.

[2] Федоренко Ю.П. - Алгоритмы и программы на C++ Builder. СПб, ДМК Пресс, 2010 ж.

[3] www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13540602.2014.969105.

Н. Райт, Технологиясы үшін бейімдеу және қолдану теориясы, үздіксіз білім беру: ролін түсіну кері байланыс, студенттердің ынталандыру, мұғалімдердің жалғастыру, оның ішінде цифрлық технологиясы. 2014 ж.

[4] www.link.springer.com/article/10.1007%2Fs11423-015-9381-x.

Раэс Аннелиз Ашу, мотивациялық әсерлер мен қауіп-қатерлер веб-бірлескен тергеу оқытуда әр түрлі топтарының оқушылары. 2012 ж.

[5] Полат Е.С., Бухаркина М.Ю., Моисеева М.В., Петров А.Е. // Жаңа педагогикалық және ақпараттық технологияны білім беру жүйесінде. Педагогикалық жоғары оқу орындары студенттеріне арналған оқу құралы. Мәскеу, Академия басылымы, 2000 ж. - 325 б.

[6] Матяш Н. В. Инновациялық педагогикалық технологиялар. Жобалық оқыту : оқу құралы. пособие для студ. мекемелердің жоғары. проф туралы білім беру / Н. В. Матяш. - 2-е изд., доп.- М. : «Академия», 2012.- 160 с

[7] Кодиров К., Мирзоев А. Дидактикалық аспектілері ақпараттық технологияларды қолдану оқу. — Душанбе, 2006.- 136с.

[8] Слинкин Д.А., Шамало Т.Н.// Рөлі әдісін жобаларды дамытуда, танымдық қажеттілігін оқушыларға және педагогикалық. Ғылыми-практикалық конференция тезистері, Екатеринбург, 13-16 ақпан, 2001 - 240-241 б.

[9] Абушкин Х. Х. // Проблемалық оқыту - мұғалімге. Саранск. Морд басылымы, 1996 ж. - 311 б.

[10] www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/08870446.2014.953530.

Косте Д., Алла Ф. Бағалау іс-шаралар кешені, болашағы мен денсаулық үшін іс-шаралар мінез-құлқының өзгеруі.. 2015 ж.

[11] www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10494820.2013.764323?journalCode=nile20. Чиа-Вэнь Цай. Қолдану веб-бірлесіп реттелетін оқу үшін оқытуды дамыту және тарту, студенттердің аралас компьютерлік курстар. 2013 ж.

REFERENCES

[1] D. Stephens.R., Diggins K., Turkane D., D. Cogswell - C++ Cookbook / C++. A collection of recipes. M., KUDITS-Press, 2007.

[2] Y. Fedorenko.P. - Algorithms and programs in C++ Builder. SPb, publishing house "Williams", 2010

[3] www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/13540602.2014.969105.

N. Wright, for application of the theory of adaptation and Technology continuing education: understanding the role of feedback, encouraging students, teachers, continue, including digital technology. 2014

[4] www.link.springer.com/article/10.1007%2Fs11423-015-9381-x.

Open Annelies RAES, motivational effects and risks of the web in teaching students in a variety of joint investigation teams. 2012

[5] E. Polat.. Bukharkina M. Yu., And M. Moses.In. A. Petrov.E. // New pedagogical and information technologies in the education system. Textbook for students of pedagogical universities. Moscow, edition of Academy, 2000. - p. 325

[6] H. Matyas. V. Innovative educational technologies. Project-based learning : textbook. a manual for students. institutions of higher. about professional education / N. V. Matyas. - 2nd ed. DOP. - M. : "Academy", 2012.- 160 p.

[7] Kodirov K., Mirzoev. Didactic aspects of the use of information technology. — Dushanbe, 2006.- 136с.

[8] D Slinkin.A. Shamalo T. N. V. // // the Role of project method in the development of cognitive needs of students and the pedagogical. Scientific conference, abstracts, Ekaterinburg, March 13-16, 2001 - p. 240-241.

[9] X. X. Abushkin // Problem-based learning - the teacher. Saransk. Mord edition, 1996 - 311 b.

[10] www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/08870446.2014.953530.

Costa, D., Alla F. Assessment-a set of measures, the prospects for health and measures to change behavior.. 2015.

[11] www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10494820.2013.764323?journalCode=nile20. Chia-Wen Tsai. Using the web learning together with training for regulated development, and attract students, computer training for combination. 2013

Г.Б. Исаева, А.М. Бейсенова

Казахский государственный женский педагогический университет, г. Алматы

ВИРТУАЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ПРЕИМУЩЕСТВА ВИРТУАЛЬНЫХ МАШИН И УРОВНИ ВИРТУАЛИЗАЦИИ

Аннотация. В данной статье рассматриваются виртуальные машины, преимущества виртуальных машин и уровни виртуализации. В настоящее время роль виртуальных машин особенно важна. Центры обработки данных, в том числе много пространства и формы энергии инфраструктуры охлаждения. Виртуализация большинство консолидированных серверов в качестве своих физических серверов. Это позволит увеличить количество серверов с высокой пропускной способностью.

Число физических машин определяется качеством сервера. Поэтому уменьшить количество энергии, необходимой для расширения площади их распространения. Сокращение количества серверов, пространства, потребление энергии будет продолжать расти. В то же время увеличивает количество углекислого газа. Когда эта потеря энергии, этот показатель превышает пороговое значение, имеет важное значение в Европе.

В заключение, наши взгляды на потребности бизнес-учреждения, организованный рабочий процесс. Определено атрибуты персональных компьютеров за последние десять лет при исполнении служебных обязанностей, офисных задач. В то же время, возникают потребности бизнеса. Как реальный инструмент для пользователей будет количество транспортных средств от корпоративных информационных систем. В результате активного развития «облака» исключены из расчета, собственных данных пользователя. Таким образом, инфраструктура управляется, включены в программы.

Ключевые слова: виртуальная машина, уровни виртуализации, операционные системы, сервер, инкапсуляция, визуализация, приложение.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 161 – 165

Kh.A. Sarsenbayev¹, B.S. Khamzina², G.A. Koldassova², G.B. Issayeva³¹South-Kazakhstan State University named after M. Auezov, Shymkent, Kazakhstan;²Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan;³Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, KazakhstanE-mail: sarsenbayev80@mail.ru, kuzyamake@mail.ru**APPLICATION OF BIOPOLYMER DRILLING
FLUID FOR EFFECTIVE OPENING PRODUCTIVE HORIZONS
HORIZONTAL WELLS**

Annotation. The requirement for opening of productive horizon with tightened, the main task of every year - to keep operational characteristics of the reservoir, which in horizontal wells is overdue, as the contact time of the mud increases many times. Drilling fluids based on biopolymer meet all the requirements for drilling. Currently, a significant place in production drilling is occupied by wells with horizontal termination, which is connected both with the reconstruction of the old well stock and drilling on the continental shelves. At the same time, the main argument for using wells of a complex profile is to increase the flow rate of the well due to a significant increase in drainage area in the reservoir.

The final oil recovery factor is determined by both the geological factors and the technologies used to open the formation. Drilling fluids play an important role in this complex interconnected complex of measures. Despite the continuous improvement of the drilling fluids formulations for the initial opening of reservoirs, in most cases they do not always ensure the preservation of reservoir properties and do not create the conditions for ensuring the expected productivity of the wells.

Long-term research into the study of physical and chemical processes in the "drilling mud-collector" system does not provide universal recommendations to ensure the highest possible quality of the opening of the reservoir. In this connection, this problem remains very urgent and requires new solutions.

Key words: drilling fluid, polymer, slime, horizontal well.

УДК 622.244.49

Х.А. Сарсенбаев¹, Б.С. Хамзина², Г.А. Колдасова², Г.Б. Исаева³¹М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан;²әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;³Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан**КӨЛДЕНЕҢ ҰҢҒЫМАЛАРДЫҢ
ӨНІМДІК ҚАБАТЫН ТИІМДІ АШУ ҮШІН
БИОПОЛИМЕРЛІ БҰРҒЫЛАУ ЕРІТІНДІСІН ҚОЛДАНУ**

Аннотация. Көлденең ұңғымаларды бұрғылау барысында бұрғылау ерітіндісінің технологиялық сипаттамасының сақталмау салдарынан әртүрлі қиындықтар туады. Ұңғыманы бұрғылаудың көрсеткіштерін жақсарту үшін бұрғылау ерітіндісінің реологиялық және құрылымдық қасиеттерін жақсарту керек. Ұңғыманы бұрғылау мен аяқтау кезіндегі қиындықтардың ішінде бірінші орында ұңғыманы тазалау тұрады. Сондықтан қазіргі кезде шетелде көлденең ұңғымаларды бұрғылау үшін полимерлер негізіндегі полимер ерітінділер кеңінен қолданылуда. Қазіргі уақытта, айтарлықтай орны ескі ұңғымаларды қалпына байланысты және континенттік қайраңында бұрғылау көлденең аяқтау, бар ұңғымаларды бұрғылау айналысады. Бұл жағдайда, күрделі профильді пайдаланып негізгі дәлел ұңғыма айтарлықтай ыдысындағы дренаж аймағын

ұлғайту жолымен өндірісті жақсы арттыру болып табылады. Соңғы мұнай өндіру факторы геологиялық факторлар ретінде анықталады және технологияларды резервуар ашылу қолданылады. осы кешенде маңызды рөл, бұрғылау ерітінділерін қызметінің өзара байланысты жиынтығы. өнімді құралымдардың негізгі ашуға бұрғылау ерітінділерін әзірлеу үздіксіз жақсартуға қарамастан, көп жағдайда, олар әрдайым резервуар қасиеттерін сақталуын қамтамасыз етуге емес, және күтілетін ақ өнімділігін қамтамасыз ету үшін жағдай жасау емес.

Жүйесінде физикалық және химиялық процестер туралы ұзақ мерзімді зерттеулер «балшық – коллектор» өндіретін қалыптастыру ашу ең жоғары ықтимал сапасын қамтамасыз етуге мүмкіндік беретін, әмбебап ұсынымдар бермейді. Осыған байланысты, мәселе өте өзекті болып табылады және жаңа шешімдерді талап етеді.

Тірек сөздер: бұрғылау ерітіндісі, полимер, шлам, көлденең ұңғыма.

Қазіргі кезде жер қойнауындағы мұнай мен газды толық өндірудің перспективті әдісінің бірі кен орнын көлденең ұңғымалармен (КҰ) игеру жүйесін пайдалану. Бұл өткізгіштігі төмен және біркелкі емес қабаттары бар кен орындары үшін аса өзекті [1].

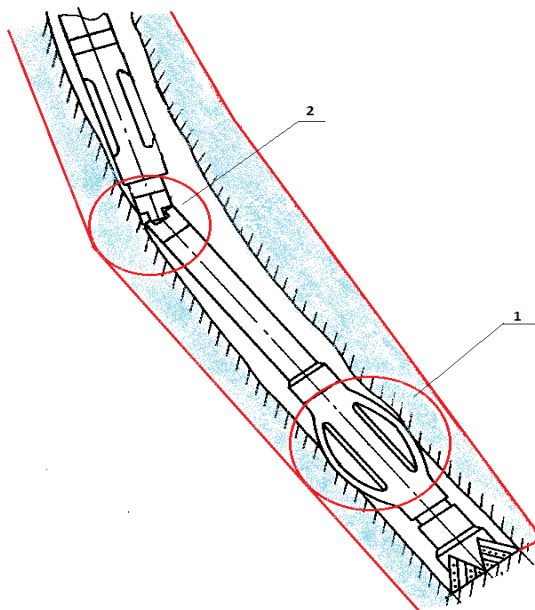
Көлденең ұңғымаларды бұрғылаудың тиімділігі айтарлықтай көлденең оқпанда ұңғыманы қиындықсыз қазылуын қамтамасыз ететін бұрғылау ерітінділерінің көсеткіштеріне тәуелді.

Қалай болғанда да көлденең ұңғымаларды бұрғылау кезінде туындайтын қиындықтар пайдаланылатын бұрғылау ерітіндісіне байланысты болады. Көлденең ұңғымаларды бұрғылау шартына байланысты бұрғылау ерітіндісінің технологиялық сипаттамасының сақталмау салдарынан мынадай қиындықтар туу мүмкін:

- ұңғыма оқпанының шламдармен толуы және нашар тазалануы;
- бұрғылау бағанасына қарсы күштің жоғары болуы және бұрғылау бағанасының керекті салмағының қашауға берілмеуі;
- ұңғыма қабырғасының тұрақтылығының бұзылуы;
- өнімді аймақтың бұрғылау ерітіндісін жұтып алуы.

Ұңғыманы бұрғылаудың көрсеткіштерін жақсарту үшін бұрғылау ерітіндісінің реологиялық және құрылымдық қасиеттерін жақсарту керек [2].

Көлбеу бағытталған оқпанда бұрғылау бағанасы оқпанның төменгі қабырғасында жатады. Сазды тау жыныстар гидратацияланады да тұрақтылығын жоғалтады, бұрғылау бағаны бұрала әлсіз қабатқа ене бастайды. Егер бұрғылау бағанын көтеретін болса, бұрғылау бағаны қысылып қалады (1-сурет).



- 1-сурет – 35° бұрышпен бұрғыланған ұңғымадағы бұрғыланған тау жыныстардың тұнуы.
1 – бұрғылау тізбегіндегі ерітіндісімен ұңғыма қабырғаларының байланысқа түсу барысы;
2 – ұңғыманың майысу бұрышындағы шаю ерітіндісімен ұңғыма қабырғаларының байланысқа түскен бөлігінің жылжу мүмкіндігі туындайтын бөлік

Өзге де бірдей жағдайларда оқпанның көлбеулігінің бұрышы ұлғайғанда қолданылып жатқан бұрғылау ерітіндісінің тығыздығын азайтады. Бұрғылау ерітіндісінің тығыздығы қабат қысымын және ұңғыма қабырғаларының тұрақтылығын сақтау үшін жеткілікті жоғары болуы керек. Сонымен қатар қабаттың гидрожарылуына жол бермеу үшін бұрғылау ерітіндісінің тығыздығы жеткілікті төмен болуы керек.

Ұңғыманың тереңдігі мен бұрышының көлбеулігі артқан сайын ұңғыма қабырғаларының опырылуы артады, ал қабаттың гидрожарылу градиенті, әдетте бұрыш көлбеулігі артқан кезде азаяды.

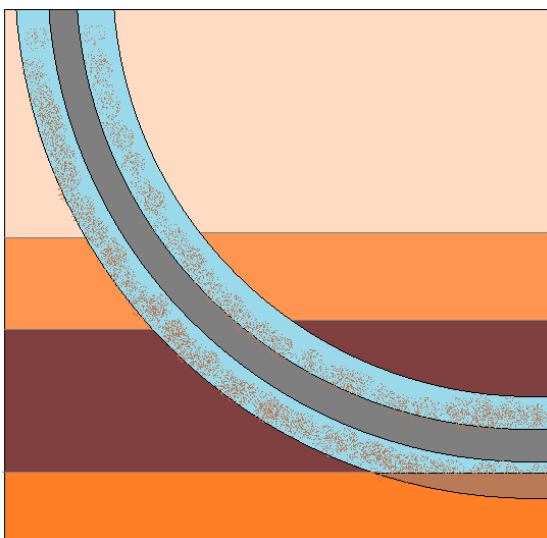
Ұңғыманы бұрғылау мен аяқтау кезіндегі қиындықтардың ішінде бірінші орында ұңғыманы тазалау тұрады. Көлденең ұңғымаларды бұрғылау кезінде ерітіндінің шламды тиімді тасымалдау және жақсы ұстау қабілеттілігі ерітіндінің маңызды факторлары болып табылады.

Ерітіндіні таңдау оқпанды тазалау сапасын анықтайды. Ұңғыманы тазалаудың тиімділігі ұңғыманың профилі мен құбыраралық кеңістіктің геометриясына байланысты [1].

Шламды құбыр аралық кеңістіктен шығару үшін бұрыш көлбеулігінің классификациясы:

- 1) тік $0 - 10^\circ$;
- 2) төмен $10 - 30^\circ$;
- 3) орташа $30 - 60^\circ$;
- 4) жоғары $60 - 90^\circ$.

Оқпан бұрышының көлбеулігі 10° -тан төмен болса, бөлшектер ауырлық үшіннің ықпалымен тұна бастайды, шламды қабат пайда болады (2-сурет).



2-сурет – Бұрғылау кезінде шламдардан құралған қиындық түзілу процесі

$10 - 30^\circ$ аралығында шламның қабаттануы басталады. Шламның тұтқырлығы мен тығыздығы артып, алайда төменге жылжу үрдісі сақталады. Бұл үрдіс ұңғыма көлбеулігі 60° жеткенге дейін азая береді, содан кейін үйкеліс күшінің әсерінен шламның тұнуы тоқтайды.

Аса қауіпті $45 - 55^\circ$ аралығындағы бұрыштар (бірінші классификация бойынша) және $30 - 60^\circ$ аралығындағы бұрыштар (екінші классификация бойынша) болып табылады.

Бұрғылау ерітіндісінің құбыр аралық кеңістіктегі ағу жылдамдығы оқпанды тазалаудың негізгі параметрі ретінде қаралады. Ағын режиміне қарамастан, ағымның жылдамдығын арттыру шламды тасымалдауды жақсартады.

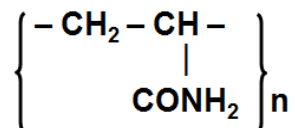
Өте жоғары жылдамдық кезде (турбулентті ағын) ең қатты бөлшектер ағынмен шығарылады.

Ығысудың төменгі жылдамдығында тұтқырлықтың жоғары мәні шламды ұстап тұратын және сыртқа шығаратын тамаша қасиеттерді қамтамасыз етеді. Ерітіндінің жақсы ұстап тұру қабілеті шламның тұнуын болдырмайды.

Көлденең ұңғыманы бұрғылау үшін ерітіндіні таңдаған кезде ұңғыманы бұрғылау, аяқтау, ұңғыманы пайдалану, өндіруді қарқындалу үрдісінің бүкіл кезеңін ескеру керек. Қазіргі кезде

шетелде КҰ-ы бұрғылау үшін полисахаридтер негізіндегі (биополимерлер, полианионды целлюлозалар және туынды крахмал) ингибирлеуші қасиеті жоғары, сондай-ақ қышқылда немесе суда еритін қатты фазасы бар коьматациялайтын полимерлі ерітінділер кеңінен қолданылуда.

Полимерлі бұрғылау ерітінділері – бұл су негізіндегі жоғары молекулярлы заттардың ерітінділері. Мұндай заттардың ерітінділері мономерді бірнеше рет қайталау арқылы құрылған (мономер – бір буын). Беттік белсенді заттың мономерінің негізіндегі мысал:



Құрамында полимері бар бұрғылау ерітіндісі бірінші рет АҚШ-та өткен ғасырдың 50-ші жылдардың ортасында қолданылған болатын. Ол бентонит ұнтағынан, полимерден (винилацетат сополимері және малеин қышқылы) және кальцинирленген содадан тұрды [3].

Полимерлі ерітінділердің негізгі ерекшеліктері:

1. Псевдопластикалық қасиеттері. Соның арқасында полимерлі ерітінділер жақсы тазалағыш, ұстап тұрғыш, көтергіш (транспорттаушы) қасиетке ие.

Бұл құбыр аралық кеңістікте ығысудың аз жылдамдығында полимерлі ерітіндінің тұтқырлығы судың тұтқырлығынан бірнеше есе артқандықтан қамсамасыз етіледі. Ал ығысудың жоғары жылдамдығында, яғни қашауды шаятын арналарда полимерлі ерітіндінің тұтқырлығы су тұтқырлығына жақын болады.

2. Тау жыныстарына фильтраттың сіңуіне жол бермейтін ұңғыма қабырғасында қабық түзеді. Бұл полимерлі ерітінділердің полиэлектролиттік қасиеттерінің арқасында. Яғни зарядтарының болуының арқасында полимер молекулалары ұңғыма қабырғасына адсорбцияланады. Бұл өз кезегінде флокуляция процесінің салдарынан бұрғылау ерітіндісінің шламнан тазалануын жақсартады.

3. Ұзын тізбекті полимерлер турбулентті ағыс режимі кезінде гидравликалық кедергіні азайтатын қасиетке ие (Томс эффектісі 1949 ж.). Полимерлі қоспалар еріткішпен (сумен) салыстырғанда гидравликалық кедергіні 80%-ға дейін азайтады. Бұл тәжірибе жүзінде дәлелденген.

Ерітіндінің негізгі компоненті – биополимерлі реагент, ол ерітіндіде ұяшықты құрылымды қалыптастырады. Бұл ұяшықты құрылым тыныш күйде және 0-ге жақын ығысу жылдамдығында қатты дененің қасиеттеріне ие, ал жоғары ығысу жылдамдығында сұйық заттың қасиеттеріне ие бола алады. Биополимерлі бұрғылау ерітіндісі ұңғыма қабырғасының тұрақтылығын, бұрғыланған тау жыныстарын сыртқа шығаруды, оқпанда жұтылуды болдырмайтын фильтрациялық қабықты қамтамасыз етеді. Ал ең бастысы өнімдік қабаттың коллекторлық қасиеттерін сақтайды.

Су берілісінің деңгейін бақылау:

- фильтрат тұтқырлығының жоғарылануымен;
- қатты фазаның (кальций карбонаты) дұрыс таңдалған көлемімен және концентрациясымен қамтамасыз етіледі.

Ерітіндінің сілтілігін бақылау үшін каустикалық сода (NaOH), калий гидроксиді (KOH) қолданылуы мүмкін. Әртүрлі тұздар (NaCl, KCl, NaBr) және олардың комбинациялары керекті тығыздықты, ингибирлеуші қабілетті, қабаттық флюидпен үйлесімділікті қамтамасыз ету үшін қолдануға болады. Майлау қоспалары, жалпы жағдайда, талап етілмейді. Қатты фазаның болмауы мен полимерлердің жоғары концентрациясының арқасында үйкеліс коэффициенті 0,2-ден аспайды. Ал бентонит негізіндегі ерітінділерде ол шамамен 0,3-ке тең.

Биополимердің термиялық тозуы 95°C температурадан басталады. Тұздың минималды 3% концентрациясында бұл шек 140°C температураға дейін артады. Арнайы реагенттер (рН реттегіштер, оттегіні сіңіргіштер, антиоксиданттар және т.б.) ерітіндінің тұрақтылығын 150°C дейін сақтай алады.

1995 жылдан бастап Ресейде өнеркәсіптік көлемде БП-92 биополимерлі өнім шығарыла бастады (НТО "ИТИН"). Бұл биополимерлі өнім *Azotobacter vinelandii* микроағзаларының тіршілігінің нәтижесі.

Бүгін кеңінен танымал ерітінділер – M-I Drilling Fluids Co фирмасы мен ANCOR Drilling Fluids компаниясының Flo-Pro жүйесінің қсантан негізіндегі биополимерлері.

Өнімдік қабатты ашу үшін қойылатын талап күннен күнге күшеюде. Ең басты міндет – қабаттың пайдалану сипаттамасын сақтап қалу. Бұл көлденең ұңғымалар үшін өте өзекті болып келеді, себебі бұрғылау ерітіндісімен байланыс уақыты бірнеше есеге артады. Биополимерлі бұрғылау ерітінділері бұрғылау ерітінділерге қойылатын талаптарға сай келеді.

ӘДЕБИЕТ

[1] Шенбергер В.М., Зозуля Г.П., Гейхман М.Г., Матиешин И.С., Кустышев А.В. Техника и технология строительства боковых стволов в нефтяных и газовых скважинах: Учебное пособие. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2006. - 573 с.

[2] Технологическое руководство по буровым растворам для бурения горизонтальных скважин и скважин с большим углом отклонения. Компания M - I Дрилинг Флюиде The definitive Technological Guide to drilling fluids for high - dугle wells horizontal wells, M-I drilling Fluids Co. p – 96. – 2001.

[3] Грей Дж. Состав и свойства буровых агентов (промысловых жидкостей) / Дж. Грей, Г. Дарли // М.: Недра, 1985. 509 с.

[4] Журнал «Нефтегазовое обозрение», статья «Новые подходы к строительству многоствольных горизонтальных скважин», выпуск 3. 2003г.

REFEREN

[1] Shenberger V.M., Zozulja G.P., Gejzman M.G., Matieshin I.S., Kustyshev A.V. Tehnika i tehnologija stroitel'stva bokovyh stvolov v nefjnyh i gazovyh skvazhinah: Uchebnoe posobie. – Tjumen': TjumGNGU, 2006. - 573 s.

[2] Tehnologicheskoe rukovodstvo po burovym rastvoram dlja burenija gorizontal'nyh skvazhin i skvazhin s bol'shim uglom otklonenija. Kompanija M - I Drilling Fljuide. *The definitive Technological Guide to drilling fluids for high - dугle wells horizontal wells, M-I drilling Fluids Co.* p – 96. – 2001.

[3] Grej Dzh. Sostav i svojstva burovyh agentov (promyvochnyh zhidkostej) / Dzh. Grej, G. Darli // М.: Nedra, 1985. 509 s.

[4] Zhurnal «*Neftegazovoe obozrenie*», stat'ja «Novye podhody k stroitel'stvu mnogostvol'nyh gorizontal'nyh skvazhin», vypusk 3. 2003g.

Х.А. Сарсенбаев¹, Б.С. Хамзина², Г.А. Колдасова², Г.Б.Исаева³

¹Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан;

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

³Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ БИОПОЛИМЕРНЫХ БУРОВЫХ РАСТВОРОВ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО ВСКРЫТИЯ ПРОДУКТИВНЫХ ГОРИЗОНТОВ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН

Аннотация. Требование к вскрытию продуктивного горизонта с каждым годом ужесточаются, главная задача – сохранить эксплуатационные характеристики пласта, что в горизонтальных скважинах актуально, так как время контакта бурового раствора возрастает многократно. Буровые растворы на биополимерной основе отвечают всем требованиям, предъявляемым к бурению. В настоящее время значительное место в эксплуатационном бурении занимают скважины с горизонтальным окончанием, что связано как с реконструкцией старого фонда скважин, так и бурением на континентальных шельфах. При этом, основным доводом использования скважин сложного профиля является увеличение дебита скважины за счет значительного возрастания площади дренирования в продуктивном пласте.

Конечный коэффициент извлечения нефти определяется как геологическими факторами, так и применяемыми технологиями вскрытия пласта. Важную роль в этом сложном взаимосвязанном комплексе мероприятий выполняют буровые растворы.

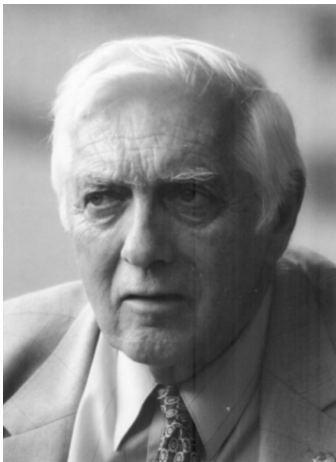
Несмотря на постоянное совершенствование рецептур буровых растворов для первичного вскрытия продуктивных пластов, в большинстве случаев они не всегда обеспечивают сохранение коллекторских свойств и не создают условия для обеспечения ожидаемой производительности скважин.

Многолетние исследования по изучению физико-химических процессов в системе «буровой раствор - коллектор» не дают универсальных рекомендаций, позволяющих обеспечить максимально возможное качество вскрытия продуктивного пласта. В связи с чем, данная проблема остается весьма актуальной и требует новых решений.

Ключевые слова: буровой раствор, полимер, шлам, горизонтальная скважина.

Памяти ученого

КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНОЙ И ОБЩЕСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АКАДЕМИКА НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН Э.Г.БООСА



11 февраля на 86-м году скончался заведующий лабораторией физики высоких энергий Физико-технического института Министерства образования и науки Республики Казахстан доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной академии наук Республики Казахстан Эрнст Гербертович Боос.

Э.Г.Боос родился 17 августа 1931 года в деревне Кир-Ички Нижнегорского района Крымской области в семье служащего.

Мать Эрнста скончалась в 1931 году. Отец после повторного брака с 1936 года проживал в Москве, был ранен при бомбежке осенью 1941 года, в том же году был репрессирован и умер в заключении в 1942 году. В 1956 году он был реабилитирован за отсутствием состава преступления. Все заботы по воспитанию Эрнста взяла на себя его тетя по отцу Боос Элла Леонгардовна, ставшая его приемной матерью.

С началом Великой Отечественной Войны граждане немецкой национальности были высланы из мест своего постоянного проживания в отдаленные районы Казахстана и Сибири. Так в 1941 году *Боос* оказались в ауле Боз-Гуль Казалинского района Кызыл-Ординской области (отсюда у Эрнста прекрасное знание казахского языка), а в 1943 году – в городе Казалинске.

В 1949 году по окончании школы Э.Г.Боос переехал в город Алма-Ату и поступил на физико-математический факультет Казахского государственного университета им. С.М.Кирова. В 1954 году он закончил с отличием университет и был направлен на работу в учреждение народного образования Алма-Атинской области. В 1955 году перешел на работу в Физико-технический институт Академии наук Казахской ССР. Директор института, будущий академик Ж.С.Такибаев, заметил его способности и трудолюбие и, не обращая внимания на формальные сложности, принял на работу в ФТИ АН КазССР. Рост и становление Эрнста Гербертовича как крупного ученого в области физики элементарных частиц и в других областях человеческого знания тесно связаны с работой в институтах Академии наук Казахстана, где он прошёл путь от аспиранта до академика *НАН РК*.

Ещё в годы аспирантуры и работы над кандидатской диссертацией он проявил желание и способности исследовать процессы множественного рождения вторичных частиц при высоких энергиях. При анализе ливней, образованных в космических лучах, им был разработан новый метод оценки энергии первичной частицы в предположении постоянства поперечных импульсов вторичных заряженных частиц. Именно в рамках этого метода ему удалось оценить долю первичной энергии, переданную на образование мезонов. Оказалось, что не вся энергия затрачивается на образование частиц, что противоречило предсказаниям гидродинамической модели. В 1961 году Э.Г.Боос защитил кандидатскую диссертацию на тему “Исследование ядерных взаимодействий нуклонов по распределению поперечных импульсов генерированных частиц”.

С 1962 года Эрнст Гербертович руководит лабораторией, сосредоточив её деятельность на исследовании свойств неупругих взаимодействий протонов и антипротонов с нуклонами и атомными ядрами, используя результаты, полученные при облучении ядерных фотоэмульсий и пузырьковых камер на ускорителях элементарных частиц. Им было установлено, что в реакциях эксклюзивного типа основное рождение мезонов происходит через предварительное возбуждение соударяющихся нуклонов до резонансных состояний.

В аннигиляционном канале антипротон-протонных взаимодействий при энергиях эВ Э.Г.Боос с сотрудниками обнаружили запоминание зарядов взаимодействующих частиц вторичными пионами, что указывает на проявление партонной структуры нуклонов.

Как представитель школы физиков, возглавлявшейся академиками А.А.Логуновым и А.М.Балдиным, используя идеи Нобелевских лауреатов Дж.Бьёркена о партонной структуре нуклонов и Р.Фейнмана о масштабной инвариантности структурных функций, Эрнст Гербертович в семидесятые годы начал интенсивно изучать важные для построения теории сильных взаимодействий свойства инклюзивных реакций в неупругих протон-нуклонных взаимодействиях при ускорительных энергиях. Он в соавторстве с сотрудниками лаборатории создаёт скейлинг-инвариантную модель рождения частиц на основе минимизирующего волнового пакета, которая позволяет определить явный вид структурной функции для инклюзивной реакции. Все это легло в основу докторской диссертации “Исследование множественного образования адронов в протон-нуклонных взаимодействиях при энергиях, достижимых на ускорителях”, защищенной им в Ученом совете Лаборатории высоких энергий Объединенного института ядерных исследований (Дубна) в 1975 году.

Многие годы, возглавляя лабораторию, Эрнст Гербертович читал лекции в КазГУ, АГУ и в КазЖенПИ. В 1978 году ему присваивается звание профессора.

Как известно, в области физики высоких энергий успех исследований во многом определяется концентрацией усилий многих коллективов. В этом плане Э.Г.Боос, проявляя инициативу, добивался того, что руководимая им лаборатория участвовала в работе многих союзных и международных сотрудничествах под эгидой ОИЯИ (г.Дубна) и ИФВЭ (г.Протвино) --например, советско-французское сотрудничество с использованием водородной пузырьковой камеры "Мирабель", международные сотрудничества на базе ВПК "Людмила" и искровой стримерной камеры "Риск" .

С увеличением энергии сталкивающихся частиц значительно повышается роль измерительной техники для регистрации ядерных взаимодействий. В ранге руководителя лаборатории Эрнст Гербертович много усилий и внимания уделял модернизации методики обработки и анализа фотоснимков ядерных взаимодействий, полученных с помощью пузырьковых камер. Он вместе со своими сотрудниками разработал метод анализа и автоматизированного измерения плотности ионизационных потерь заряженных частиц, зарегистрированных на снимках с пузырьковых камер.

Свой вклад Эрнст Гербертович внёс в исследование атмосферных ливней, образованных космическими лучами. Он развил каскадно-вероятностный метод, который оказался весьма эффективным при вычислении спектров вторичных частиц и их углового распределения на различных глубинах атмосферы. Впоследствии этот метод был успешно применен и в других областях физики.

Исследование нуклон-ядерных столкновений с помощью методики ядерной фотоэмульсии позволило полнее понять процессы полного разрушения атомных ядер частицами высоких энергий.

Научная, организационная и педагогическая деятельность Э.Г.Бооса получила высокую оценку научной общественности, и в 1983 году он был избран членом - корреспондентом Академии наук Казахской ССР, а в 2004 г. был избран действительным членом (академиком) Национальной Академии Республики Казахстан.

В 1990 году на альтернативных выборах коллектив избрал его директором Института физики высоких энергий. Будучи директором, он уделял большое внимание налаживанию связей с ведущими научными центрами Европы; обретение Казахстаном независимости дало возможность расширить это сотрудничество.

Удачно развиваются совместные работы с Немецким ускорительным центром DESY. В настоящее время Институт в лице Э.Г.Бооса с коллегами принимает участие в международном сотрудничестве по исследованиям неупругих электрон-протонных взаимодействий, проводимым с помощью калориметрического детектора ZEUS. Целью работ является изучение структуры материи в области 10^{-16} см.

Совместно со своими учениками он развил исследования вклада связанных состояний вакуум-инстантонов, вклада оддеронных траекторий в глубоконеупругое электрон-протонное рассеяние.

В рамках этого сотрудничества получены важные результаты по распределениям кварков и глюонов внутри нуклонов, вкладу чармированных мезонов и ряд других результатов, подтверждающих предсказания стандартной модели при энергии, достигнутой на ускорителе HERA ($10 \cdot 13$ Эв).

В 90 – ые годы был сделан определенный вклад в развитие методики определения энергии с помощью жидкоаргонового калориметра детектора ATLAS европейского Центра ядерных исследований.

К сожалению, экономический кризис в Казахстане не позволил развиваться полноценному сотрудничеству с Европейским центром ядерных исследований (ЦЕРН, Женева), которое получило хороший старт в начале 90-х годов.

Занимаясь проблемами развития передовых информационных технологий, Эрнст Гербертович активно способствовал получению грантов НАТО и INTAS, что позволило установить в ИФВЭ НАН РК наземную станцию спутниковой связи. Это дало институту возможность успешно интегрироваться в международный процесс научных исследований. Через станцию спутниковой связи научные, учебные и некоторые общественные организации города Алматы, объединившись в некоммерческую научно-образовательную сеть, получили доступ к ресурсам Интернета.

На этой базе в настоящее время функционирует научно-образовательная сеть КазРЕНА, у истоков которой стоял Э.Г.Боос.

Э.Г. Боос руководил различными целевыми и грантовыми программами по физике и был научным руководителем республиканской программы "Гелиобиотерм" по исследованиям нетрадиционных, экологически чистых источников энергии. Тревога мировой общественности о состоянии окружающей среды стимулировала его на исследование колебаний уровней Каспийского и Аральского морей.

Много сил и энергии Эрнст Гербертович отдавал научно-организационной и общественной деятельности : в течение ряда лет он был членом Бюро Отделения физико-математических наук Академии наук Республики Казахстан, членом Высшей Аттестационной Комиссии РК, президентом Научного объединения немцев Казахстана.

Под научным руководством Э.Г.Бооса защищены 12 кандидатских и 3 докторские диссертации. Им опубликованы 3 монографии, *свыше 420 научных статей*. Результаты исследований докладывались на различных конференциях, симпозиумах, совещаниях. Начиная с 1951года, регулярно, раз в два года, проводятся международные Рочестерские конференции, на которых обсуждаются основные результаты, полученные в области физики высоких энергий . Эрнст Гербертович принял участие в работе пяти Рочестерских конференций: 1970г. (Киев), 1976г. (Тбилиси), 1990г.(Сингапур), 1994г.(Глазго), 2004г. (Москва). Ученики Эрнста Гербертовича успешно трудятся в институтах и университетах республики. *По рекомендации академика Э.Г.Бооса более 10 специалистов были направлены для стажировки в зарубежные научные центры.*

За успехи в научной и педагогической деятельности Э.Г.Боос награждается II очетной грамотой Верховного Совета КазССР, медалями “Ветеран труда”, “Ерен енбегі үшін”, “1941 - 1945 жж. Улы Отан соғысындағы женіске 65 жыл”, Почетными грамотами и нагрудными знаками Президиума АН КазССР и ЦК профсоюзов, Министерства науки и образования Республики Казахстан.

В последнее время академиком Э.Г.Боосом были установлены научные контакты с институтом ядерной физики Немецкого Технологического Центра в Карлсруэ (KIT), который в рамках соглашения финансирует Интернет-связь с DESY для ТОО «Физико-Технический институт». Проводятся совместные исследования вклада радиоизлучения заряженных частиц в широких атмосферных ливнях для определения энергии первичного космического излучения в области энергий, недостижимых в земных условиях.

Выдающийся физик, организатор науки, человек высокой эрудиции и культуры, Эрнст Гербертович Боос много сделал для развития науки и образования в Казахстане, усиления международного сотрудничества.

МАЗМҰНЫ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Қәдірбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі есептің бірмәнді шешілімділігі туралы	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есептің асимптотикалық бейнелеуі.....	18
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 және БКЗ-160 қазандықтарының жану камераларының аэродинамикасы мен жылу масса алмасуын зерттеу.....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белсарова Ф.Б.</i> Екі массивті айналмалы дене өрісіндегі айналмалы сынақ дене орбитасының орнықтылығы.....	39
<i>Ақжігітова Э.М., Құрманғалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Мюонның радиациялық ыдырауын модельден тәуелсіз түрде сипаттау	54
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 қазандығының жану камерасындағы шаң тозанды көмір отынын жағу процесін сандық модельдеу.....	58
<i>Әбишев М., Малыбаев А., Кеведо Э.</i> Мінсіз газдың геометротермодинамикасы.....	64
<i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Момынов С.Б., Сәдібек А.Ж., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Хилдың екінші есебіндегі ұйытқулы шеңбер типтес орбиталар.....	69
<i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Максұтханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> БКЗ-160 жану камерасындағы термохимиялық-газдандырылған көмір жануын зерттеудің есептеу эксперименті.....	75
<i>Салғараева Г.И., Базарбаева А.</i> Білім берудегі Steam жүйесі және робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> Бірлесіп толыққан операторлар	87
<i>Шыныбаев М.Д., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиасқаров Д.Р., Мырзақасова Г.Е., Сәдібек А.Ж.</i> Жердің жасанды серігінің сәуле қысымынан алған ұйытқуын Делоне элементтерінде есепке алу.....	98
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Қыдырбекова Ж.Б., Джумағалиева А.И.</i> Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	104
<i>Қожамқұлова Ж.Ж., Аманкелдіқызы Н., Кабаева Д.А.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын ақпараттық технологиялар және олардың даму болашағы.....	110
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста пуассон және Бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – I.....	116
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувилл операторының периодты кері есебі.....	132
<i>Қойшыева Т.Қ., Қожамқұлова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Жоғары оқу орнында болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделі.....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуалды машина және виртуалды машина ерекшеліктері мен виртуалдану деңгейлері жайлы жалпы мәселелер.....	153
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Көлденең ұңғымалардың өнімдік қабатын тиімді ашу үшін биополимерлі бұрғылау ерітіндісін қолдану.....	161
Ғалымды еске алу	
Э.Г. Боос.....	166

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.</i> Об однозначной разрешимости многоточечной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений.....	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Асимптотическое представление сингулярно возмущенных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.....	18
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> Исследование аэродинамики и теплообмена в топочных камерах котлов ПК-39 и БКЗ-160.....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белисарова Ф.Б.</i> Устойчивость орбиты вращательного движения пробного тела в поле двух массивных вращающихся тел.....	39
<i>Акжигитова Э.М., Курмангалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Описание радиоационного распада мюона в модельно – независимом подходе.....	54
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Шортанбаева Ж.К.</i> Численное моделирование процессов сжигания пылеугольного топлива в топочной камере котла ПК 39.....	58
<i>Абишев М., Мальбаев А., Кеведо Э.</i> Геометротермодинамика идеального газа.....	64
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Момынов С.Б., Садыбек А.Ж., Даиырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Возмущенная орбита кругового типа во второй задаче Хилла.....	69
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> Вычислительный эксперимент по исследованию горения термохимически-газифицированного угля в топочной камере котла БКЗ-160.....	75
<i>Салгараева Г.И., Базарбаева А.</i> Система Steam в образовании и робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> О совместно полных операторах Штурма-Лиувилля.....	87
<i>Шинибаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиаскаров Д.А., Мырзакасова Г.Е., Садыбек А.Ж.</i> Возмущения спутника земли от светового давления в элементах Делоне.....	98
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Кыдырбекова Ж.Б., Джумагалиева А.И.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения.....	104
<i>Кожамкулова Ж.Ж., Аманкелдикызы Н., Кабаева Д.А.</i> Информационные технологии, используемые при подготовке будущих педагогов, и их развитие.....	110
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- I.....	116
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б.¹, Акылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Обратная периодическая задача оператора Штурма-Лиувилля.....	132
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Профессиональная подготовка будущих преподавателей в высших учебных заведениях на основе объектно-ориентированного проектирования.....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуальные машины, преимущества виртуальных машин и уровни виртуализации...153	
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Применение биополимерных буровых растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин.....	161
Памяти ученого	
Краткий очерк научной и общественной деятельности академика Национальной академии наук Республики Казахстан Э.Г.Бооса.....	166

CONTENTS

<i>Dzhumabaev D.S., Zharmagambetov A.S.</i> Numerical method for solving a linear boundary value problem for fredholm integro-differential equations.....	5
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M.</i> On the unique solvability of a multi-point problem for system of the loaded differential equations hyperbolic type	12
<i>Dauylbayev M. K., Dzhumabaev D. S., Atakhan N.</i> Asymptotical representation of singularly perturbed boundary value problems for integro-differential equations	18
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Ospanova Sh.S.</i> Investigation of aerodynamics and heat and mass transfer in the combustion chambers of the boilers PK-39 and BKZ-160.....	27
<i>Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., Belissarova F.B.</i> The orbital stability of the motion of a test particle in a field of two massive rotating bodies.....	39
<i>Akzhigitova E.M., Kurmangaliyeva V.O., Arbuzov A.B.</i> Description of radiative muon decay using model-independent approach.....	54
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Shortanbaeva Zh.K.</i> Numerical modeling of burning pulverized coal in the combustion chamber of the boiler PK 39.....	58
<i>Abishev M., Malybayev A., Quevedo H.</i> Geometrothermodynamics of the ideal gas	64
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Rahimganov B.N., Momynov S.B., Sadybek A.G., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A.</i> Perturbed orbit of a circular type for the Hill second task	69
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Maxutkhanova A.M., Turbekova A.G., Beisenov Kh.I.</i> A Computational experiment for studying the combustion of thermochemically-gasified coal in the combustion chamber of the boiler BKZ-160.....	75
<i>Salgarayeva G.I., Bazarbayeva A.</i> Steam system in education and robotics.....	81
<i>Akylbayev M. I., Parkhatova S., Shaldanbayev A.Sh.</i> On jointly completeness of Sturm-Liouville operators.....	87
<i>Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Aliaskarov D.A., Myrzakasova G.E., Sadybek A.G.</i> Perturbations satellites from the light pressure in the delaunay elements.....	98
<i>Kabyrbekov K.A., Ashirbaev H. A., Abekova Zh. A., Omashova G.Sh., Kydyrbekova Zh. B., Dzhumagaliyeva A.I.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of palpation.....	104
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Amankeldikyzy N., Kabaeva D.A.</i> Information technology used in the preparation of future teachers and their development.....	110
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded Domains – I.....	116
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded domains – II.....	126
<i>Saprigina M.B., Akylbayev M. I., Shaldanbayev A.Sh.</i> The inverse periodic problem of the Sturm-Liouville operator.....	132
<i>Koysheva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Sabit B.</i> Training in higher education for future teachers on the basis of object-oriented design.....	146
<i>Issayeva G.B., Beisenova A.M.</i> The virtual machines, advantages of the virtual machines and virtualization levels.....	153
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Application of biopolymer drilling fluid for effective opening productive horizons horizontal wells.....	161
The memory of the scientist	
E. G. Boos	166

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19