ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

«ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ
АКАДЕМИЯСЫ» РҚБ

«ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫ» РҚБ

ХАБАРЛАРЫ

ИЗВЕСТИЯ

РОО «НАЦИОНАЛЬНОЙ
АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН»

N E W S

OF THE ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF
KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

4 (352)

OCTOBER – DECEMBER 2024

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963
PUBLISHED 4 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика және информатика сериясы».
ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)
Меншіктеуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).
Қазақстан Республикасының Ақпарат және қоғамдық даму министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген **No 16906-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.
Тақырыптық бағыты: *физика және ақпараттық коммуникациялық технологиялар сериясы.*
Қазіргі уақытта: *«ақпараттық технологиялар»бағыты бойынша ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдар тізіміне енді.*
Мерзімділігі: *жылына 4 рет.*
Тиражы: *300 дана.*
Редакцияның мекен-жайы: *050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., тел.: 272-13-19*
http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/

«Известия НАН РК. Серия физика и информатики».
ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: *Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).*

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и общественного развития Республики Казахстан **No 16906-Ж** выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *серия физика и информационные коммуникационные технологии.*

В настоящее время: *вошел в список журналов, рекомендованных ККСОН МОН РК по направлению «информационные коммуникационные технологии».*

Периодичность: *4 раз в год.*

Тираж: *300 экземпляров.*

Адрес редакции: *050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, оф. 219, тел.: 272-13-19*

http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.
Series of physics and informatics.
ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty). The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan **No. 16906-Ж,** issued 14.02.2018

Thematic scope: *series physics and information technology.*

Currently: *included in the list of journals recommended by the CCSES MES RK in the direction of «information and communication technologies».*

Periodicity: *4 times a year.*

Circulation: *300 copies.*

Editorial address: *28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19*

http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/

NEWS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCESOF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4. Namber 352 (2024). 42–59
https://doi.org/10.32014/2024.2518-1726.306

УДК 539.3

A.L. Alexeyeva, 2024.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: alexeeva@math.kz

SUBSONIC VIBROTRANSPORT SOLUTIONS
OF THE WAVE EQUATION IN SPACES OF DIMENSION *N*=1,2,3

Alexeyeva Lyudmila Alexeyevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan, alexeeva@math.kz , https://orcid.org/ 0000-0002-7131-4635

Abstract. Among the active sources of disturbances in various environments, the most common are transport and vibrotransport ones, which are associated with moving objects, the speed of which can be subsonic, sonic, supersonic, and in environments with several sonic speeds (elastic, for example) also transonic. Here, fundamental and regular vibrotransport solutions of the wave equation are constructed at subsonic speeds of the disturbance source in spaces of physical dimension (*N*=1, 2, 3). Green's functions are constructed, which describe the dynamics of the medium during the movement of a source concentrated at a point, which moves at a constant speed and vibrates at a constant frequency. On its basis, general solutions of the vibration transport equation are constructed under the action of both spatially distributed moving vibration sources and concentrated on moving surfaces and lines. A mathematical description of the Doppler Effect with a graphical illustration is given.

The constructed solutions allow us to construct solutions to many equations of continuum mechanics for studying wave processes generated by various types of moving sources of oscillations in media and should find wide application in solving various engineering and technical problems.

Keywords: wave equation, vibration transport solutions, Green's function, Fourier transform, Helmholtz equation, Doppler effect

А.Л. Алексеева, 2024.
ҚР БжҒМ, Математика және модельдеу институты, Алматы, Қазақстан.
E-mail: alexeeva@math.Kz

N=1,2,3 ӨЛШЕМДІ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ДЫБЫСҚА ДЕЙІНГІ ДІРІЛКӨЛІКТІК ШЕШІМДЕРІ

Алексеева Людмила Алексеевна – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Математика және математикалық модельдеу институтының бас ғылыми қызметкері, Алматы, Қазақстан, alexeeva@math.kz , https://orcid.org/ 0000-0002-7131-4635.

Аннотация. Әртүрлі орталардағы бұзылулардың белсенді көздерінің ішінде ең көп тарағаны көліктік және дірілді тасымалдау болып табылады, олар жылдамдығы дыбыстық, дыбыстан жоғары болуы мүмкін қозғалатын объектілермен байланысты және бірнеше дыбыстық жылдамдықтары (мысалы, серпімді) және трансоникалық болуы мүмкін. Мұнда толқындық теңдеудің іргелі және тұрақты діріл тасымалдау шешімдері физикалық өлшемді кеңістіктердегі (N=1,2,3) бұзылулар көзінің дыбыстан төмен жылдамдықтарында құрастырылған. Грин функциялары тұрақты жылдамдықпен қозғалатын және тұрақты жиілікте тербелетін нүктеде шоғырланған көз ортасының динамикасын сипаттау үшін құрастырылған. Олардың негізінде дірілді тасымалдау теңдеуінің жалпы шешімдері кеңістікте таралған қозғалатын діріл көздерінің де, қозғалатын беттер мен сызықтарда шоғырланғандардың да әрекетінен құрастырылады. Графикалық иллюстрациямен Доплер эффектінің математикалық сипаттамасы берілген. Құрастырылған шешімдер ортадағы тербелістердің әртүрлі түрлерінің қозғалатын көздерімен туатын толқындық процестерді зерттеу үшін континуум механикасының көптеген теңдеулерінің шешімдерін құруға мүмкіндік береді және әртүрлі инженерлік есептерді шешуде кең қолдануды табуы керек.

Түйін сөздер: толқын теңдеуі, дірілді тасымалдау шешімдері, Грин функциясы, Фурье түрлендіруі, Гельмгольц теңдеуі, Доплер эффектісі.

Л.А. Алексеева, 2024.
Институт математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы, Казахстан.
E-mail: *alexeeva@math.kz*

ДОЗВУКОВЫЕ ВИБРОТРАНСПОРТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ N=1,2,3

Алексеева Людмила Алексеевна – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования МНВО РК, Алматы, Казахстан, E-mail: alexeeva@math.kz, https://orcid.org/ 0000-0002-7131-4635.

Аннотация. Среди активных источников возмущений в различных средах наиболее распространены транспортные и вибротранспортные, которые связаны с движущимися объектами, скорость которых может быть дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой, а в средах с несколькими звуковыми скоростями (упругих) и трансзвуковой. Здесь построены фундаментальные и регулярные вибротранспортные решения волнового уравнения при дозвуковых скоростях источника возмущений в пространствах физической размерности (N=1,2,3). Построены функции Грина, описывающие динамику среды сосредоточенного в точке источника, который движется с постоянной скоростью и колеблется с постоянной частотой. На их основе построены общие решения вибротранспортного уравнения при действии как пространственно распределённых движущихся источников вибраций, так и сосредоточенных на движущихся поверхностях и линиях. Дано математическое описание эффекта Доплера с графической иллюстрацией.

Построенные решения позволяют строить решения многих уравнений механики сплошной среды для изучения волновых процессов, порождаемых разного вида движущимися источниками колебаний в средах, и должны найти широкое применение при решении различных инженерно-технических задач.

Ключевые слова: волновое уравнение, вибротранспортные решения, функция Грина, преобразование Фурье, уравнение Гельмгольца, эффект Доплера.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНВО РК (грант AP19674789, 2023-2025 гг.)

Введение. Среди действующих источников возмущений в различных средах наиболее распространены транспортные, которые связаны с движущимися источниками (нагрузками), форма которых не меняется с течением времени, а скорость движения может быть дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой, а в средах с несколькими звуковыми скоростями (упругие) еще и трансзвуковой. В работах (Алексеева, 2008; Alekseeva, 1991, 1994, 1998; Alexeyeva, 2010, 2016, 2017) построены транспортные решения волновых уравнений и уравнений теории упругости во всем диапазоне скоростей, и, на основе метода обобщённых функций, разработан метод граничных интегральных уравнений для решения стационарных транспортных дозвуковых и сверхзвуковых краевых задач в областях с цилиндрической формой границ. Отметим, что число работ по исследованию воздействия транспортных нагрузок на окружающую среду в последние десятилетия растёт в связи с интенсивным строительством высокоскоростных дорожных и подземных транспортных магистралей и имеет довольно обширную библиографию, с которой можно ознакомиться в статьях и монографиях (Sheng, 1999; Egger, 2000; Hoop, 2002, Brezhnev, 2005; Украинец, и др., 2006).

Есть ещё один очень важный для приложений класс источников возмущений (действующих сил и нагрузок), которые не только движутся с различными скоростями, но еще и пульсируют (вибрируют, колеблются) с определенной частотой. В качестве примера можно привести различные электромагнитные излучатели, движущиеся элементарные частицы, подвижный вибротранспорт и т.п. Поэтому актуальным является математическое моделирование таких процессов с учетом вида источника, скорости его движения и частоты вибрации. Класс таких модельных задач рассматривается в данной работе.

Ключевую роль при разработке МОФ и МГИУ для решения краевых задач для уравнений математической физики играют фундаментальные решения, поскольку служат основой для построения ядер интегральных уравнений и интегральных представлений решений краевых задач. Здесь строятся фундаментальные и регулярные вибротранспортные решения волнового уравнения при дозвуковых, сверхзвуковых и звуковых скоростях движения источника возмущений. Построены функции Грина, которые описывают динамику среды при движении сосредоточенного в точке виброисточника, и на его основе общие решения вибротранспортного уравнения при действии как распределенных в пространстве движущихся виброисточников, так и сосредоточенных на движущихся поверхностях и линиях.

Построенные решения позволяют строить решения многих уравнений механики сплошных сред для такого типа движущихся источников возмущений в средах и имеют обширные применения при решении различных инженерно-технических задач.

Материалы и методы.

1. Волновое уравнение Даламбера и его свойства. Рассматривается многомерный аналог уравнения Даламбера:

$$\Box_c u \equiv \Delta u - c^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x,t), \quad x \in R^N,\ t \in R^1. \tag{1}$$

Здесь $\Box_c$ - волновой оператор, Δ - оператор Лапласа, G-- локально интегрируемая функция.

Уравнение (1.1) строго гиперболическое, класс его решений содержит разрывные по производным функции. Поверхности разрыва в $R^{N+1}(F)$ – это характеристические поверхности уравнения (1), которые удовлетворяют характеристическому уравнению в пространстве (Петровский И.С., 1961) $R^{N+1} = \{(x, \tau \equiv ct)\}$:

$$\nu_\tau^2 = \sum_{j=1}^{N} \nu_j^2 \tag{2}$$

где $\nu(x,\tau) = \left(\nu_1, ..., \nu_N, \nu_\tau\right)$ - вектор нормали к F, $\tau = ct$. Ему соответствует конус характеристических нормалей - *световой* конус, для которого $\nu_\tau = \nu_{N+1} < 0$ [1,2]. В R^N такие поверхности движутся с единичной скоростью по τ :

$$1 = -\nu_\tau / \|\nu\|_N, \quad \|\nu\|_N = \sqrt{\nu_j \nu_j} \tag{3}$$

(по повторяющимся индексам *i, j* в произведении здесь и далее всюду проводится суммирование от *1* до *N*). В пространстве R^N им соответствуют *волновые фронты* (F_t), движущиеся со скоростью c по времени t. На них выполняются условия непрерывности Адамара:

$$\left[u(x,t)\right]_{F_t}=0, \qquad \left[\dot{u}\right]_{F_t}=-cn_i\left[u,_i\right]_{F_t}, \tag{4}$$

где через $\left[f(x,t)\right]_{F_t}$ обозначен скачок f на F_t:

$$\left[f(x,t)\right]_{F_t}=f^{+}(x,t)-f^{-}(x,t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(f(x+\varepsilon n,t)-f(x-\varepsilon n,t)\right), \qquad x\in F_t,$$

n $(x,\ t)$ – единичный вектор нормали к F_t, направленный в сторону распространения фронта волны:

$$n_i=\frac{\nu_i}{\|\nu\|_N}=\frac{grad\,F_t}{\|grad\,F_t\|},\ i=1,...,N; \tag{5}$$

Последнее равенство справедливо, если уравнение фронта волны можно представить в виде $F_t(x,t)=0$ при условии существования $grad\,F_t$.

Класс подобных решений гиперболических уравнений называют *ударными* волнами, на их фронтах производные функций и даже сами функции могут терпеть скачки.

Из второго условия (1.4) следует, на фронтах

$$\dot{u}^{-}+cn_i\,u,_i^{-}=\dot{u}^{+}+cn_i\,u,_i^{+} \tag{6}$$

Если перед фронтом волны $u\equiv 0$ (среда в покое), это равенство дает полезное соотношение на фронте волны:

$$(grad\,u,n)=-c^{-1}\dot{u}, \quad x\in F_t$$

Заметим, что касательные производные к характеристической поверхности, в силу непрерывности u, также непрерывны, т.е.

$$\gamma_\tau\left[u,_\tau\right]_F=-\gamma_j\left[u_j\right]_F \quad \text{для} \quad \forall\gamma:(\nu,\gamma)=0. \tag{7}$$

В частности, если $\gamma=\gamma^j=(-\nu_j,\nu_\tau\delta_1^j,\nu_\tau\delta_2^j,\nu_\tau\delta_2^j)$, это приводит к условиям вида:

$$\left[-u,_\tau\nu_j+u_j\nu_\tau\right]_F=0\Rightarrow n_j\left[\dot{u}\right]_{F_t}=c\left[u_j\right]_{F_t} \tag{8}$$

Решения волнового уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям на фронтах ударных волн, далее называем *классическими*.

2. **Постановка вибротранспортной задачи.**

Определение 1. Назовем функцию источника g(x,t) *вибротранспортной*, если она представима в виде

$$g(x,t) = g(x_1, x_2, x_3 - Vt)e^{i\omega t} \qquad (9)$$

где V - скорость движения источника вдоль оси X_3, ω - частота его колебаний, ω>0. При ω=0 нагрузка *транспортная*.

Если правая часть волнового уравнения (1) имеет вид (9), то естественно искать решение в подобном виде:

$$u(x,t) = u(x_1, x_2, x_3 - vt)e^{i\omega t}. \qquad (10)$$

Для этого перейдем в подвижную систему координат $(x_1, x_2, z = x - M\tau)$, $\tau = ct$, $M = V/c$ -*число Маха*. Назовем источник *дозвуковым*, если M<1, *сверхзвуковым*, если M>1, и звуковым, если M=1.

В новой системе координат решение имеет вид:

$$u = u(x_1, x_2, z)e^{iw\tau}, \quad w = \omega / c$$

Тогда, как следует из (1) амплитуда колебаний является решением *вибротранспортного уравнения* (ВТУ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (1 - M^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i\,wM\frac{\partial u}{\partial z} + w^2 u = g(x,z), \quad x \in R^2, z \in R^1 \qquad (11)$$

Обозначим $m = \sqrt{\left|1 - M^2\right|}$. Тогда, в зависимости от скорости источника, имеем три разных уравнения: при $M < 1$ *дозвуковое эллиптическое*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + m^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i\,wM\frac{\partial u}{\partial z} + w^2 u = g(x,z), \quad x \in R^2, z \in R^1; \qquad (12)$$

при $M > 1$- сверхзвуковое *гиперболическое*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - m^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i\,wM\frac{\partial u}{\partial z} + w^2 u = g(x,z), \quad x \in R^2, z \in R^1; \qquad (13)$$

при $M = 1$ - *звуковое параболическое*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2i\,wM\frac{\partial u}{\partial z} + w^2 u = g(x,z), \quad x \in R^N, z \in R^1. \qquad (14)$$

Требуется построить решение этих уравнений при любых правых частях из класса обобщенных функций медленного роста S’(R^3) (Владимиров В.С., 1978, 1986).

3. Фундаментальные решения. Преобразование Фурье.

Для построения решений уравнения (14), построим функцию Грина – фундаментальное решение U(x,z) этого уравнения с дельта-функцией в правой части:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+(1-M^2)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2i\,wv\frac{\partial U}{\partial z}+w^2U=\delta(x)\delta(z), \quad x\in R^N, z\in R^1 \qquad (15)$$

которое удовлетворяет определенным условиям затухания на бесконечности, различные для каждого случая. И далее, используя свойство функции Грина, построим решения ВТУ для подвижных виброисточников, распределенных в ограниченных объемах, либо сосредоточенных на криволинейных линиях.

Для построения решений используем преобразование Фурье обобщенных функций, которое для суммируемых регулярных обобщенных функций совпадает с классическим преобразованием Фурье (Владимиров, 1986):

$$\bar{f}(\xi,\zeta)=\int_R f(x,z)\exp(i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+z\zeta))dx_1dx_2dz$$

$$f(x,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_R \bar{f}(\xi,\zeta)\exp(-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+z\zeta))d\xi_1 d\xi_2 d\zeta \qquad (16)$$

Тогда из (15) получим

$$-\left(\|\xi\|^2+(1-M^2)\zeta^2-2wv\zeta-w^2\right)\bar{U}=1, \quad \xi\in R^N, \zeta\in R^1$$

Откуда следует:

при $M<1$ $\bar{U}=-\dfrac{1}{\|\xi\|^2+m^2\zeta^2-2wM\zeta-w^2}$, (17)

при $M>1$ $\bar{U}=-\dfrac{1}{\|\xi\|^2-m^2\zeta^2-2wM\zeta-w^2}$, (18)

при $M=1$ $\bar{U}=-\dfrac{1}{\|\xi\|^2-2w\zeta-w^2}$, (19)

Здесь в статье рассмотрим дозвуковой случай. Вид оригинала зависит от размерности пространства, в котором это уравнение рассматривается. Здесь построим $U(x,z)$ для пространств физической размерности N=3,2,1

4. Решения вибротранспортного уравнения при движении регулярных и сингулярных виброисточников в 3D пространстве.

4.1. Функция Грина *N*=3. Построим функцию Грина U(x,z) - фундаментальное решение ВТУ (12), удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности. Для этого найдем преобразование $U(x,z) = \mathrm{F}^{-1}\left[\bar{U}(\xi,\zeta)\right]$, используя свойство линейных преобразований координат в пространстве преобразований Фурье.

Л е м м а 1. Для N=3

$$U(x,z) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R^3}\frac{e^{-i\zeta z}e^{-i(\xi,x)}}{\|\xi\|^2+m^2\zeta^2-2wM\zeta-w^2}d\xi_1 d\xi_2 d\zeta =$$

$$= -\frac{e^{-i(wMz/m^2)}}{(2\pi)^3 m}\int\limits_{R^3}\frac{e^{-i\varsigma z/m}e^{-i(\xi,x)}}{\|\xi\|^2+\varsigma^2-(w/m)^2}d\xi_1 d\xi_2 d\varsigma.$$

Доказательство: при M <1 преобразуем (17) к виду, удобному для построения оригинала:

$$\bar{U}(\xi,\zeta) = -\frac{1}{\|\xi\|^2+m^2\zeta^2-2wM\zeta-w^2} = -\frac{1}{\|\xi\|^2+m^2\left(\zeta-wM/m^2\right)^2-(w/m)^2} \quad (20)$$

$$= -\frac{e^{-i(wMz/m^2)}}{(2\pi)^N}\int\limits_{R^3}\frac{e^{-iz\varsigma}e^{-i(\xi,x)}}{\|\xi\|^2+m^2\varsigma^2-(w/m)^2}d\xi_1 d\xi_2 d\varsigma =$$

$$(21)$$

$$= -\frac{e^{-i(wMz/m^2)}}{(2\pi)^N m}\int\limits_{R^3}\frac{e^{-i\varsigma z/m}e^{-i(\xi,x)}}{\|\xi\|^2+\varsigma^2-(w/m)^2}d\xi_1 d\xi_2 d\varsigma$$

Здесь использовали замену переменных $\varsigma = m\left(\zeta + wM/m^2\right)$. Заметим, что здесь под знаком интеграла стоит преобразование Фурье фундаментального решения трёхмерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta W + k^2 W = \delta(y), \quad k = \frac{w}{m}, \quad y \in R^3,$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда, имеет следующий вид (Владимиров В.С., 1986):

$$W(y) = \frac{\exp(-ik\|y\|)}{4\pi\|y\|}, \quad y \in R^3. \quad (22)$$

Его преобразование Фурье имеет вид

$$\bar{W} = -\frac{1}{\|\xi\|^2+\zeta^2-(k+i0)^2}, \quad y \in R^3. \quad (23)$$

Из формулы (20) с учетом (22) и (23) следует:

для N=3 $$U(\mathbf{x},z) = U(x_1,x_2,z) = -\frac{e^{-iwm^{-2}Mz}}{4\pi\sqrt{z^2+m^2r^2}}\exp\left(-\frac{iw}{m^2}\sqrt{z^2+m^2r^2}\right). \quad (24)$$

4.2. Решения однородного ВТУ при N=3. Теперь построим решения однородного ВТУ:

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2}+2i\,wM\,\frac{\partial u^0}{\partial z}+w^2u^0 =, \quad x \in R^2, z \in R^1; \quad (25)$$

В пространстве преобразований Фурье, оно имеет вид:

$$-\left(\|\xi\|^2+(1-M^2)\zeta^2-2wv\zeta-w^2\right)\overline{u}^0=0 \quad \xi\in R^N, \zeta\in R^1 \tag{26}$$

Решение этого уравнения $\overline{u}^0=\alpha(\xi,\zeta)\delta_S(\xi,\zeta)$ - сингулярная обобщенная функция – простой слой на поверхности S, на которой

$$\left(\|\xi\|^2+(1-M^2)\zeta^2-2wv\zeta-w^2\right)=\|\xi\|^2+m^2\left(\zeta-wM/m^2\right)^2-\left(w/m\right)^2=0. \tag{27}$$

Здесь плотность простого слоя $\alpha(\xi,\zeta)$ - произвольная интегрируемая на *S* функция.

Соответственно

$$u^0(x,z)=\int_S \alpha(\xi,\zeta)e^{-i(\xi,x)}e^{-i\zeta z}dS(\xi,\zeta), \quad \xi=\left(\xi_1,\xi_2\right) \tag{28}$$

Заметим, что уравнение (28) – это уравнение эллипсоида с центром в точке $\left(0,0,\zeta=wM/m^2\right)$:

$$\|\xi\|^2+m^2\varsigma^2=\left(w/m\right)^2, \quad \varsigma=\zeta-wM/m^2. \tag{29}$$

Для построения $u^0(x,z)$ можно также использовать решения однородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u^0(y)+k^2u^0(y)=0. \tag{30}$$

Его решения можно разложить в ряды по сферическим гармоникам и сферическим функциям Бесселя (М. Абрамовиц, 1979):

$$\begin{aligned} u(y)&=\sum_{n,m}a_n j_n(k\|y\|)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}=\sum_{n,m}a_n j_n(k\|y\|)P_n^m\left(\frac{y_3}{\|y\|}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m= \\ &=\sum_{n,m}a_n\frac{j_n(k\|y\|)}{\|y\|_2^m}P_n^m\left(\frac{y_3}{\|y\|}\right)(y_1+iy_2)^m, \qquad \|y\|_2=\sqrt{y_1^2+y_2^2} \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $P_n^m(\cos\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра, θ,φ угловые сферические координаты. Из формул (21) следует $y=(x,z/m)$

$$u^0(x,z)=e^{-i(wMz/m^2)}\sum_{n,l}a_n j_n\left(\frac{w}{c}\sqrt{z^2+m^2r^2}\right)P_n^l\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+\mu^2r^2}}\right)\frac{(x_1+ix_2)^l}{r^l}, \tag{31}$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, коэффициенты α_n произвольные комплексные числа.

4.3. Общее решение ВТУ при N=3. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Решение ВТУ* (12) *в 3D-пространстве имеет следующий вид*:

$$u(x,z) = U(x,z) * g(x,z) + u^0(x,z). \quad (33)$$

Если $g(x,z)$ *- регулярная функция и* $g(x,z) \in L_1(R^3)$, *то*

$$U(x,z) * g(x,z) = \int_{R^3} U(x-y, z-h) g(y,h) dy_1 dy_2 dh. \quad (34)$$

Если $g(x,z)$ *- сосредоточенная на поверхности S сингулярная функция:* $g(x,z) = \alpha(x,z)\delta_S(x,z), \quad \alpha(x,z) \in L_1(S)$, *то*

$$U(x,z) * g(x,z) = \int_S U(x-y, z-h) g(y,h) dS(y,h) \quad (35)$$

Если $g(x,z)$ *- сосредоточенная на кривой l сингулярная функция:* $g(x,z) = \beta(x,z)\delta_l(x,z), \quad \beta(x,z) \in L_1(l)$, *то*

$$U(x,z) * g(x,z) = \int_l U(x-y, z-h) g(y,h) dl(y,h) \quad (36)$$

Доказательство. Обозначим $VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z)$ дифференциальный оператор ВТУ (12). Подставляя (33) в (12), получим требуемое:

$$VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z)\left(U(x,z) * g(x,z) + u^0(x,z)\right) =$$

$$= \left\{VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z)U\right\} * g + VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z)u^0 =$$

$$= \delta(x,z) * g + 0 = g(x,z)$$

Здесь использовали линейность оператора, (15), (25) и свойство свёртки с дельта-функцией (Владимиров В.С., 1978).

Если $u1(x,z)$ - любое решение (12), то $u2(x,z) = u(x,z) - u1(x,z)$ является решением однородного ВТУ (25). Следовательно $u1(x,z) = u(x,z) - u2(x,z)$. Т.е. имеет аналогичный $u(x,z)$. Ч. т. д.

4.5. Эффект Доплера. Обозначим $r/z = \mathrm{tg}\varphi(x,z)$, где φ - угол, который образует радиус-вектор точки (x,z) с осью Z. тогда функцию Грина можно записать в виде:

$$U(x,z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{z^2 + m^2 r^2}} \exp\left(-i\alpha z\left(M + \sqrt{1 + m^2 \mathrm{tg}^2\varphi(x,z)}\right)\right)$$

Вдоль оси X_3, как видим, распространяется волна вида

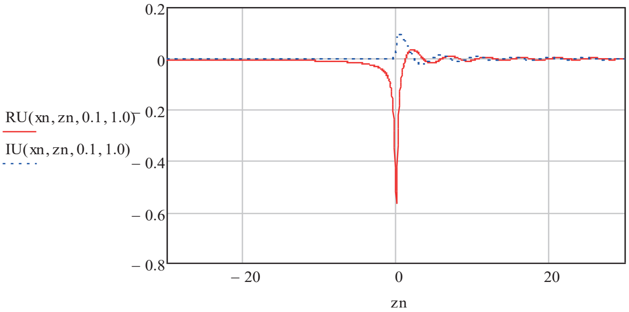
$$\varphi(x_1,x_2,x_3,t)=-\frac{1}{4\pi|x_3-Vt|}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{(M+1)|x_3-Vt|}{cm^2}\right)\right).$$

Если фиксировать точку наблюдения (x_1,x_2,x_3) и измерить приходящий по времени сигнал в этой точке, то он описывается функцией:

$$\mathrm{U}(x,x_3,t)=U(x,x_3-vt)e^{i\omega t}=-\frac{e^{-i\alpha M(x_3-Vt)+i\omega t}}{4\pi\sqrt{(x_3-Vt)^2+m^2r^2}}\exp\left(-i\alpha\sqrt{(x_3-Vt)^2+m^2r^2}\right)=$$

$$=-\frac{\exp\left(-i\alpha\left(Mx_3+\sqrt{(x_3-Vt)^2+m^2r^2}\right)\right)}{4\pi\sqrt{(x_3-Vt)^2+m^2r^2}}e^{i\omega t\left(1-(M/m)^2\right)}.$$

На рисунке 1 представлена реальная и мнимая части $U(x,z)$ при числе Маха M=0.1 и частотах $\omega=1$ и $\omega=10$. В подвижной системе координат частота колебаний



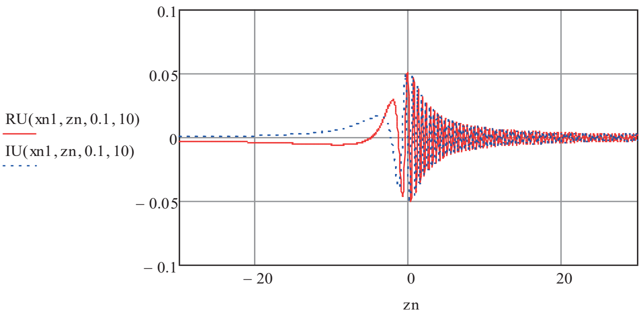


Рисунок 1- $U(x,z)$ при M=0.1, $\omega=1;10$

А в исходной неподвижной системе координат (x_1,x_2,x_3) картина иная. На Рис. 2 представлена осциллограмма сигнала в фиксированной точке на оси X_3 с течением времени t=tn при числе Маха M=0.8 и частоте вибрации $\omega=10$.

Она наглядно демонстрирует повышение частоты и амплитуды вибрации при приближении виброисточника и наоборот их понижения при его удалении.

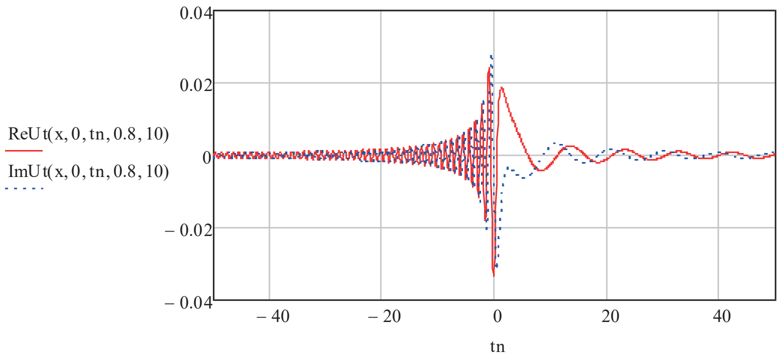


Рисунок 2 - Осциллограмма $\mathrm{U}(x,0,t)$ при M=0.8 и $\omega=10$

Как хорошо известно, давление в воздухе удовлетворяет волновому уравнению (*Гринченко*, 2007). Это явление получило название *эффекта Доплера* – повышение тона (частоты) и громкости (амплитуды) при приближении виброисточника и наоборот понижения тона и громкости при его удалении.

5. Решения вибротранспортного уравнения при движении регулярных и сингулярных виброисточников в 2D пространстве

5.1. Функция Грина *N*=2. Построим функцию Грина U(x.z) аналогично вышеизложенному. Ее обратное преобразование Фурье в этом случае имеет вид:

$$U(x,z) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2}\frac{e^{-i\zeta z}e^{-i\xi x}}{\xi^2+m^2\left(\zeta+wM/m^2\right)^2-(w/m)^2}d\xi d\zeta = \\ = -\frac{e^{-i(wMz/m^2)}}{(2\pi)^2 m}\int_{R^2}\frac{e^{-i\varsigma z/m}e^{-i(\xi,x)}}{\xi^2+\varsigma^2-(w/m)^2}d\xi d\varsigma. \tag{37}$$

Здесь тоже использовали замену переменных $\varsigma = m\left(\zeta - wM/m^2\right)$. Здесь под знаком интеграла стоит преобразование Фурье фундаментального решения двухмерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = \delta(y), \quad k=\frac{w}{m}, \quad y\in R^2 ,$$

Фундаментальное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда, с учётом временного сомножителя, имеет следующий вид (Владимиров В.С., 1986):

$$\Phi 2(y) = -\frac{i}{2\pi}H_0^{(2)}(k\|y\|), \quad y\in R^2;$$

Здесь $H_0^{(2)}$ - функция Ханкеля второго рода. Соответственно, сравнивая с подынтегральной функцией в (37), с учетом линейных преобразований переменных, получим оригинал:

$$U(x,z) = -\frac{ie^{-iwm^{-2}Mz}}{(2\pi)^3 m} H_0^{(2)}\left(\frac{w}{m^2}\sqrt{z^2+m^2x^2}\right) \qquad (38)$$

5.2. Решения однородного ВТУ при *N*=2. Теперь построим решения однородного ВТУ:

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2i\,wM\,\frac{\partial u^0}{\partial z} + w^2 u^0 = 0, \quad x \in R^1, z \in R^1; \qquad (39)$$

В пространстве преобразований Фурье, оно имеет вид:

$$-\left(\xi^2 + (1-M^2)\zeta^2 - 2wv\zeta - w^2\right)\bar{u}^0 = 0 \quad \xi \in R^1, \zeta \in R^1 \quad (40)$$

Решение этого уравнения $\bar{u}^0 = \alpha(\xi,\zeta)\delta_S(\xi,\zeta)$ - сингулярная обобщенная функция – простой слой на поверхности эллипсоида S, центр которого смещен в точку $\left(0,0,\zeta = wM/m^2\right)$:

$$\xi^2 + m^2\left(\zeta - wM/m^2\right)^2 = \left(w/m\right)^2,$$

Здесь плотность простого слоя $\beta(\xi,\zeta)$ - произвольная интегрируемая на *S* функция.

Соответственно

$$u^0(x,z) = \int_S \beta(\xi,\zeta)e^{-i(\xi,x)}e^{-i\zeta z}dS(\xi,\zeta) \qquad (41)$$

Для построения $u^0(x,z)$ можно также использовать решения однородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u^0(y) + k^2u^0(y) = 0, \quad y = (y_1, y_2)$$

Их можно разложить в ряды Фурье-Бесселя:

$$u(y) = \sum_n b_n J_n(k\|y\|)e^{in\varphi}, \qquad \|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Поскольку здесь $y = (x, z/m)$, получим

$$u^0(x,z) = e^{-i(wMz/m^2)}\sum_n b_n J_n\left(\frac{w}{cm}\sqrt{z^2+m^2r^2}\right)\frac{(x+iz/m)^n}{r^n}, \qquad (42)$$

где коэффициенты b_n произвольные комплексные числа.

5.3. Общее решение ВТУ при *N*=2. Аналогично П.4.3 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Решение ВТУ* (12) *в 2D-пространстве имеет следующий вид*:

$$u(x,z) = U(x,z) * g(x,z) + u^0(x,z). \tag{43}$$

Если $g(x,z)$ *- регулярная функция и* $g(x,z) \in L_1(R^2)$, *то*

$$U(x,z) * g(x,z) = \int_{R^2} U(x-y, z-h) g(y,h) dydh \,. \tag{44}$$

Если $g(x,z)$ *-- сосредоточенная на кривой l сингулярная функция:* $g(x,z) = \beta(x,z)\delta_l(x,z), \quad \beta(x,z) \in L_1(l)$, *то*

(45)

Если $g(x,z) = G\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial z^m}\delta(x,z)$ *- сосредоточенный вибротранспортный источник, то*

$$U(x,z) * g(x,z) = G\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial z^m} U(x,z).$$

Формула (43) позволяет определять поле любого виброисточника из класса обобщенных функций медленного роста, как регулярных, так и сингулярных. При этом для сингулярных функций следует при вычислении свёртки пользоваться определением свёртки в пространстве обобщённых функций (Владимиров, 1986).

6. Одномерные решения ВТУ при движении регулярных и сингулярных виброисточников (N=1)

6.1. **Функция Грина и решения однородного ВТУ при N=1.** В этом случае $u = u(z)e^{iw\tau}$, $w = \omega / c$ и $u(z)$ и удовлетворяет уравнению

$$m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i\, wM \frac{\partial u}{\partial z} + w^2 u = g(x,z), \quad z \in R^1; \tag{46}$$

Фундаментальное решение удовлетворяет уравнению:

$$m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2i\, wM \frac{\partial U}{\partial z} + w^2 U = \delta(z), \quad z \in R^1; \tag{49}$$

А его трансформанта Фурье имеет вид:

$$\bar{U} = -\frac{1}{m^2\zeta^2 - 2wM\zeta - w^2} = - = -\frac{1}{m^2\left(\zeta - wM / m^2\right)^2 - \left(w / m\right)^2} =$$

$$= -\frac{m^{-2}}{\left(\zeta - wM / m^2\right)^2 - \left(w / m^2\right)^2}, \tag{50}$$

Для построения оригинала воспользуемся фундаментальным решением ОДУ:

$$\frac{d^2\Phi 3}{dy^2}+\kappa^2\Phi 3(y)=\delta(y),\quad \kappa=w/m^2;$$

$$\bar{\Phi}3(\zeta)=-\frac{1}{\zeta^2-\kappa^2}$$

функция Грина, которого имеет вид:

$$\Phi 3(y)=\frac{\sin(\kappa|y|)}{2\kappa}$$
.

Она не стремится к нулю на бесконечности. Но ее амплитуда падает с ростом частоты вибрации, и наоборот растет при ее уменьшении.

Из этой формулы и формулы (50), с учетом свойства сдвига в пространстве преобразований Фурье, получим оригинал:

$$U(z)=\frac{\sin(w|z|/m^2)}{2w}e^{-iM/m^2}.$$

Соответственно решение однородного ВТУ имеет вид:

$$u^0(x)=\left(a\cos(\kappa z)+b\sin(\kappa z)\right)e^{-iM/m^2}$$
.

6.2. Общее решение ВТУ при *N*=1. Аналогично пунктам 4.3 и 4.5 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Решение ВТУ* (12) *в 2D-пространстве имеет следующий вид*:

$$u(z)=U(z)*g(z)+u^0(z).$$

Если g(z) - регулярная функция и $g(z)\in L_1(R^1)$*, то*

$$U(z)*g(x,z)=\int_{R^2}U(z-y)g(y)dy$$

Если $g(z)=G\dfrac{d^m\delta(z)}{dz^m}$ *- сосредоточенный standard вибротранспортный источник, то*

$$U(z)*g(z)=G\frac{d^m U(z)}{dz^m}$$

Таким образом все решения этого уравнения в пространствах физической размерности построены. По аналогии их можно построить в пространствах любой размерности, что можно предложить заинтересованному читателю. Здесь мы ограничились тремя.

Заключение. Исследование процессов распространения волн в сплошных средах и электромагнитных полях приводит к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных различного типа и определению их решений в виде векторных полей, которые описывают различные характеристики динамических процессов. Это могут быть, например, перемещения и скорости, как в упругих и многокомпонентных средах, или напряженности электромагнитных полей, изменение которых в пространстве и времени позволяет моделировать такие процессы и изучать их математическими методами.

Как известно, любое векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = u_j(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_j$ можно представить через скалярный и векторный потенциалы $(\varphi, \boldsymbol{\psi})$ в виде (*Морс*, 2013):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x},t) + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},t), \qquad (51)$$

которые описывают дилатационные и вихревые волны в рассматриваемой среде. В изотропных средах, как правило, они удовлетворяю волновым уравнениям:

$$\Box_{c_\varphi}\varphi = f(\mathbf{x},t), \quad \Box_{c_\psi}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{g}(\mathbf{x},t). \qquad (52)$$

поскольку скорость распространения волн в таких средах всегда конечная и не зависит от направления распространения волны. Скорость движения может быть разной у этих волн, как в упругих средах, где сдвиговые волны, описываемые векторным потенциалом, распространяются медленнее дилатационных. А в электромагнитной среде, описываемой уравнениями Максвелла, они одинаковые.

Построенные здесь вибротранспортные решения волнового уравнения позволяют исследовать волновые процессы в таких средах при воздействии подвижных виброисточников волн различной природы. В частности, решения уравнений Ламе теории упругости с использованием потенциалов Ламе, которые удовлетворяют (52), позволяют исследовать напряженно-деформированные состояние упругой среды при таких динамических процессах с широким приложением в задачах геофизики и сейсмологии.

Построенные решения можно использовать для решения вибротранспортныхх краевых задач акустики, теории упругости и электродинамики.

Заметим также, что построенные решения при нулевой частоте вибрации описывают дозвуковые транспортные решения волнового, уже хорошо изученные автором ранее (Алексеева, 2008). А транспортные и вибротранспортные нагрузки – это один из самых распространенных источников возмущений в средах. Например, электромагнитные поля электромагнитных излучателей на подвижных платформах, которые широко применяются в автомобильном и железнодорожном транспорте, можно моделировать с использованием построенных здесь решений.

Литература

Абрамовиц, М., Стиган, И. Справочник по специальным функциям. Москва: Наука (1979).

Алексеева, Л.А. Обобщённые решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения (2008). Математический журнал. Т. 8, №2, 1-19.

Alekseeva, L.A. Fundamental solutions in the elastic space in the case of running loads. Applied mathematics and mechanics (1991). V.55, no. 5, .854-862.

Alekseyeva, L.A. Somigliana's formulae for solving the elastodynamics equations for travelling loads. Applied Mathematics and Mechanics (1994). V. 58, no 1, 109-116.

Alekseyeva, L.A. Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elastodynamics by Stationary Running Loads. Engineering Analysis with Boundary Element (1998). No 11, 37-44.

Alexeyeva, L.A. Singular border integral equations of the BVP of elastodynamics in the case of subsonic running loads. Differential equations. (2010). V. 46, no 4, 512-519.

Alexeyeva, L.A. Kayshibayeva, G.K. Transport Solutions of the Lame Equations and Shock Elastic Waves. Computational Mathematics and Mathematical Physics (2016). V. 56, no 7, 1343–1354.

Alexeyeva, L.A. Singular Boundary Integral Equations of Boundary Value Problems of the Elasticity Theory under Supersonic Transport Loads. Differential equations (2017). V. 53, no 3, 317–332.

Brezhnev, V.A., Abramson, V.M., Zemelman, A.M., Vlasov, S.N., Koulaguin, N.I., Merkin, V.E., Razbeguin, V.N. Russian underwater tunnels in the system of international transportation ways. Tunneling and Underground Space Technology (2005). V. 20, no 6, 595-599.

Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука (1986).

Владимиров, В.С. Обобщённые функции в математической физике. Москва: Наука (1978).

Гринченко В. Т., Вовк И. В., Маципура В.Т. *Основы акустики*. Киев: Наукова думка (2007).

Морс Ф.М., *Г. Фешбах* Г. Методы теоретической физики. Т.1. Рипол Классик (2013).

Sheng, X., Jones, C.J.C., Petyt, M. Ground vibration generated by a load moving along a railway track. J. Sound Vibration (1999). No 228, 129–156.

Egger, P. Design and construction aspects of deep tunnels. Tunneling and Underground Space Technology (2000). V. 15, no 4, 403-408.

Hoop, A.T.D. The moving-load problem in soil dynamics-the vertical displacement approximation. Wave Motion (2002). V. 36, 1–12.

Петровский И.С. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва: Физматгиз (1961).

Украинец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок (2006) Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 124 с.

References

Abramowitz, M., Stigan, I. Handbook of Special Functions. Moscow: Nauka (1979).

Alekseeva, L.A. Generalized solutions of boundary value problems for one class of traveling solutions of the wave equation (2008). Mathematical Journal. vol. 8, No.2, 1-19.

Alekseeva, L.A. Fundamental solutions in the elastic space in the case of running loads. Applied mathematics and mechanics (1991). V.55, no. 5, .854-862.

Alekseyeva, L.A. Somigliana's formulae for solving the elastodynamics equations for travelling loads. Applied Mathematics and Mechanics (1994). V. 58, no 1, 109-116.

Alekseyeva, L.A. Boundary Element Method of Boundary Value Problems of Elastodynamics by Stationary Running Loads. Engineering Analysis with Boundary Element (1998). No 11, 37-44.

Alexeyeva, L.A. Singular border integral equations of the BVP of elastodynamics in the case of subsonic running loads. Differential equations. (2010). V. 46, no 4, 512-519.

Alexeyeva, L.A. Kayshibayeva, G.K. Transport Solutions of the Lame Equations and Shock Elastic Waves. Computational Mathematics and Mathematical Physics (2016). V. 56, no 7, 1343–1354.

Alexeyeva, L.A. Singular Boundary Integral Equations of Boundary Value Problems of the Elasticity Theory under Supersonic Transport Loads. Differential equations (2017). V. 53, no 3, 317–332.

Brezhnev, V.A., Abramson, V.M., Zemelman, A.M., Vlasov, S.N., Koulaguin, N.I., Merkin, V.E., Razbeguin, V.N. Russian underwater tunnels in the system of international transportation ways. Tunneling and Underground Space Technology (2005). V. 20, no 6, 595-599.

Vladimirov, V.S. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka (1986).
Vladimirov, V.S. Generalized functions in mathematical physics. Moscow: Nauka (1978).
Grinchenko V.T., Vovk I. V., Matsipura V.T. Fundamentals of acoustics. Kiev: Naukova dumka (2007).
Morse F.M., G. Feshbach G. Methods of theoretical physics. Vol.1. Ripoll Classic (2013).
Sheng, X., Jones, C.J.C., Petyt, M. Ground vibration generated by a load moving along a railway track. J. Sound Vibration (1999). No 228, 129–156.
Egger, P. Design and construction aspects of deep tunnels. Tunneling and Underground Space Technology (2000). V. 15, no 4, 403-408.
Hoop, A.T.D. The moving-load problem in soil dynamics-the vertical displacement approximation. Wave Motion (2002). V. 36, 1–12.
Petrovsky I.S. Lectures on partial differential equations. Moscow: Fizmatgiz (1961).
Ukrainets V.N. Dynamics of tunnels and pipelines of shallow laying under the influence of mobile loads (2006) Pavlodar: SIC S. Toraighyrov PSU, 124 p.

CONTENTS

INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES

МАЗМҰНЫ

АҚПАРАТТЫҚ-КОММУНИКАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Publication Ethics and Publication Malpracticein the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethicalguidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any otherlanguage, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive

ISSN2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

Директор отдела издания научных журналов НАН РК *А. Ботанқызы*

Редакторы: *Д.С. Аленов, Ж.Ш.Әден*

Верстка на компьютере *Г.Д.Жадыранова*

Подписано в печать 2.12.2024.

Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать –ризограф.

16,0 п.л. Тираж 300. Заказ 4.

Национальная академия наук РК

050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-19